SECTION 2

A LA RECHERCHE D'UN TAUX DE DISTRIBUTION OPTIMAL

1. Etude de la liaison entre le taux de distribution optimal et le taux de rentabilité r des bénéfices réinvestis

A- La formalisation de la valeur de l'entreprise: l'approche «dividendes»
B- Taux de distribution optimal et richesse des opportunités d'investissement

2. L'estimation du taux de distribution optimal dans le cadre d'‘hypothèses plus réalistes

A- l'introduction d'une liaison r=f(b)
B- l'introduction d'une liaison k=f(b)
C- l'introduction simultanée d'une liaison r=f(b) et d'une liaison k=f(b)

Les résultats précédents indiquent une préférence nette des actionnaires français pour les dividendes. Il ne faudrait pas toutefois en conclure que les dirigeants d'entreprises devraient distribuer intégralement leurs bénéfices: en effet il convient , lors de la prise de décision, de tenir compte d'un autre élément, la rentabilité des opportunités d'investissement de l'entreprise. Si celles-ci s'avèrent favorables, il n'est pas exclus que l'accroissement des bénéfices attendus du réinvestissement des fonds obtenus grâce à une réduction du dividende, puisse plus que compenser l'effet négatif de cette réduction de dividendes.

C'est à la prise en considération simultanée de ces deux éléments, préférence des actionnaires pour les dividendes et richesse des opportunités d'investissement de l'entreprise que sera consacrée cette section.

Le premier paragraphe concernera l'analyse d'un cas ultra-simplifié où l'on étudiera les incidences sur la valeur de l'entreprise du niveau de rentabilité des bénéfices réinvestis lorsque ce niveau de rentabilité *r* et le taux de rendement requis par les actionnaires *k* sont présumés indépendants du taux de rétention *b* retenu.

Le second paragraphe concernera une situation plus proche de la réalité intégrant une relation explicite entre *k* ,*r* et *b*.

1. ETUDE DE LA LIAISON ENTRE LE TAUX DE DISTRIBUTION OPTIMAL ET LE TAUX DE RENTABILITE r DES BENEFICES REINVESTIS

(lorsque ce dernier et le taux de rendement requis par les actionnaires k sont indépendants du taux de rétention b retenu).

L'analyse de l'incidence de la rentabilité des bénéfices réinvestis sur la valeur de l'entreprise suppose au préalable une formalisation de cette valeur de l'entreprise: c'est dans le cadre de l'approche "dividendes" de M.J. GORDON que nous nous nous situerons ici.

A -LA FORMALISATION DE LA VALEUR DE L'ENTREPRISE :L'APPROCHE "DIVIDENDES"[1]

A la base de cette approche est l'idée que la valeur d'une action, comme la valeur de tout actif, peut être estimée par la valeur actualisée des revenus futurs qu'on attend de cette action. Ainsi, si pour un investisseur

- V_0 est la valeur actuelle d'une action à la date t_0
- D_t le dividende qu'il attend de l'action à la période t
- P_n le prix qu'il s'attend à tirer de l'action à la fin de la période t = n
- k le taux d'actualisation que l'investisseur associe à l'échéancier des revenus futurs successifs,compte tenu du risque présumé de la société

et si cet investisseur a pour horizon de placement une durée <u>d'un an</u>, la valeur de l'action sera estimée par lui à

$$V_0 = \frac{D_1 + P_1}{1+k}$$

[1] M.J. GORDON: "The Investment, Financing and Valuation of a Corporation ,New York: Irwin 1962, pp. 44-50.

Dans le cas où cet horizon aurait une durée plus longue, mais *finie*, il viendrait:

$$V_0 = \sum_{t=1}^{t=\alpha} \frac{D_t}{(1+k)^t} + \frac{P_n}{(1+k)^n}$$

et pour un horizon *infini*

$$V_0 = \sum_{t=1}^{t=\alpha} \frac{D_t}{(1+k)^t}$$

Ces trois présentations de la valeur d'une entreprise sont, mise à part la question de la durée des horizons respectifs, équivalentes. Toutefois de ces trois présentations, c'est la dernière, correspondant à un horizon infini , qui est privilégiée par M.J. GORDON. Ce choix n'est pas fondé sur des considérations d'ordre théorique: il résulte tout simplement du fait que dans le cadre de travaux empiriques, il est nécessaire de procéder à des estimations de variables qui soient suffisamment objectives et crédibles ; or si des estimations de dividendes futurs D_t peuvent encore être à peu près formulées, il n'en va pas de même pour les évaluations de P_n .

Il faut noter toutefois que le modèle précédent est caractéristique de la valeur d'un titre pour un investisseur donné, compte tenu de ses anticipations personnelles. Or, ce que GORDON essaie d'expliquer n'est pas V_0 mais P_0 la valeur courante du titre sur le marché, et lorsqu'il écrit :

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+k)^t}$$

D_t et k représentent en fait une *moyenne des anticipations* de dividendes de l'ensemble des investisseurs, et une *moyenne des taux de rendement requis* particuliers de ces investisseurs. C'est à cette dernière moyenne que correspond le concept de "taux de rendement requis" par les actionnaires d'une entreprise.

Ainsi le prix normal d'une entreprise n'ayant aucune dette, distribuant l'intégralité de ses bénéfices, et dont les actionnaires auraient le sentiment qu'elle serait capable de leur fournir indéfiniment un bénéfice annuel de Y_0 avec ses seuls actifs existants K_0 , devrait être égal à

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{Y_0}{(1+k)^t} \simeq P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{Y_0}{(1+k)^t} \cong \frac{Y_0}{k} \qquad \text{avec } Y_0 = r_0\, K_0 \qquad [I]$$

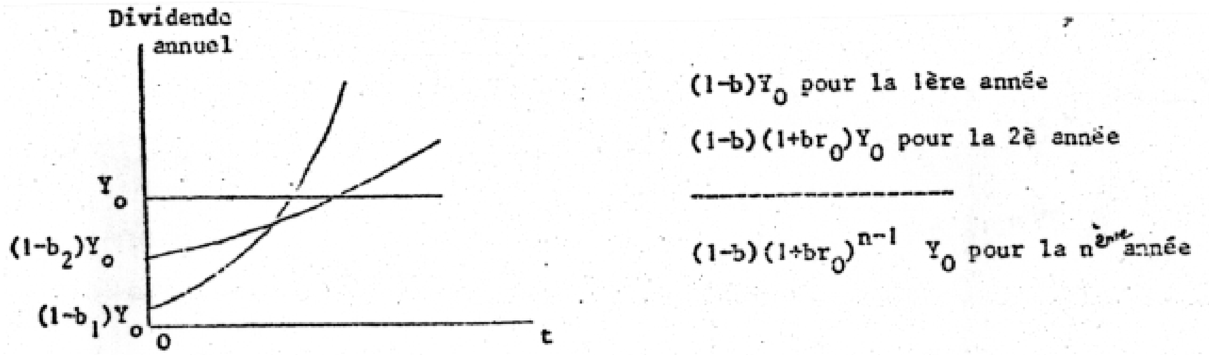
Si au contraire, les dirigeants de cette entreprise s'engageaient dans une politique de rétention des bénéfices, à concurrence d'une fraction *b* de ces bénéfices pour réaliser des investissements de rentabilité moyenne *r* , le modèle de GORDON conduirait à un prix normal P_0 de l'action égal à:

$$P_0 = \frac{(1-b)Y_0}{k - br_0} \quad \text{avec } Y_0 = r_0\, K_0 \qquad [II]$$

En effet, dans ce cas, si l'on admet que le marché anticipe la stabilité de son taux de rétention *b* et celle de son taux de rentabilité *r* , la séquence des dividendes futurs serait

$(1\text{-}b)Y_o$	pour la 1ère année
$(1\text{-}b)\ (1+br_o)Y_o$	pour la 2ème année
....	
$(1\text{-}b)(1+br_o)\ \ Y_o$	pour la nième année

GRAPHIQUE 8



L'expression ci-dessus peut être simplifiée: on observe que P_0 est la somme des termes d'une progression géométrique de premier terme.

$$a = \frac{(1-b)Y_0}{1+k} \quad \text{et de raison} \quad q = \frac{1+br_0}{1+k}$$

.L'application de la formule générale associée à une telle somme $S = a\left[\frac{1-q^n}{1-q}\right]$ conduit en effet, n étant infini , et à condition que *br* soit plus petit que *k*, à l'expression [II] ci-dessus, dont [I] n'est qu'un cas particulier, celui où *b* est égal à 0.

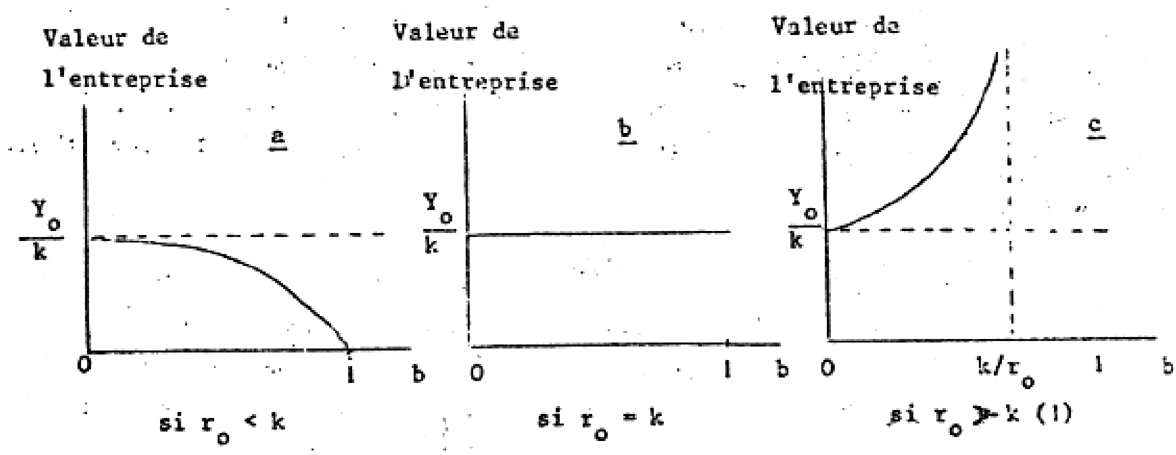
Le taux de rétention optimal *b* (ou alternativement le taux de distribution optimal (1-b)) sera celui pour lequel P_0 aura la plus forte valeur.

C'est ce taux que devraient s'efforcer de retenir les dirigeants d'entreprises ,s'ils entendaient aller dans le sens de l'objectif de maximisation de la valeur boursière de leur entreprise.

B TAUX DE DISTRIBUTION OPTIMAL ET RICHESSE DES OPPORTUNITES D'INVESTISSEMENT.

Pour se rendre compte de l'impact que peut avoir cette rentabilité potentielle des investissements sur le taux de distribution optimal (ou sur son complément à 1, le taux de rétention optimal), il suffit d'observer comment P_0 évoluerait en fonction de *b* dans le cadre de trois situations -types, où *r* serait successivement égal à *k*, inférieur à *k* et enfin supérieur à *k*.

Les graphiques 9a, 9b, et 9c ci-dessous illustrent ces 3 situations :



La politique que devraient suivre les dirigeants d'entreprises, dans le cadre des hypothèses présentées, ressort clairement des graphiques présentés :

- dans le cas où le taux de rentabilité des investissements potentiels de l'entreprise serait inférieur au taux de rendement requis par les actionnaires pris dans leur ensemble ($r_0 < k$), toute rétention des bénéfices se traduirait par une baisse de la valeur de l'entreprise sur le marché. La politique de distribution optimale dans ce cas serait de distribuer intégralement tous les bénéfices réalisés.

- dans le cas contraire où le taux de rentabilité de ses investissements potentiels serait plus élevé que le taux de rendement requis par les actionnaires ($r_0 > k$), plus l'entreprise retiendrait de bénéfices et plus sa valeur augmenterait, jusqu'à devenir infinie pour le taux de rétention optimal $\frac{k}{r_0}$[2]

- enfin dans le cas où il y aurait identité entre taux de rentabilité des investissements potentiels et taux de rendement requis par les actionnaires, la valeur de l'entreprise serait indépendante du taux de rétention choisi. Tous les taux situés entre 0 et 1 seraient alors optimaux.

---

[2]Taux limite de validité de l'équation: $P_0 = \frac{(1-b)Y_0}{k - br_0}$ nous avions vu en effet que l'expression [II] impliquait que br_0 soit plus petit que k ou alternativement que b soit plus petit que $\frac{k}{r_0}$

L'exemple précédent est intéressant en ce sens qu'il permet de mettre en évidence la nécessité de prendre à la fois en considération le système de préférences des actionnaires (par l'intermédiaire de *k*), et la richesse des opportunités d'investissement de l'entreprise (par l'intermédiaire de *r*).

Il convient toutefois d'être très prudent dans l' interprétation des résultats précédents: en effet, nous ne connaissons pas d'entreprise qui se soit rendue capable , en manipulant son taux de distribution , ou par tout autre moyen , de porter le cours de ses actions à un niveau infini. Il faut donc admettre que les hypothèses sous-jacentes à l'analyse précédente, indépendance de *r* et *b*, indépendance de *k* et *b* sont trop restrictives pour permettre à un dirigeant d'entreprise d'asseoir une politique de répartition de ses bénéfices. Aussi convient-il de lever ces hypothèses irréalistes: c'est l'objet des développements suivants.

2. L'estimation du taux de distribution optimal dans le cadre hypothèses plus réalistes.

Nous introduirons une à une ces nouvelles hypothèses avant de les considérer simultanément[3].

A- L'introduction d'une liaison r= f(b) (k et b étant considérés comme indépendants).

Le souci de tenir compte d'une liaison éventuelle entre *r* et *b* est parfaitement légitime : une modification du taux de distribution (ou alternativement du taux de rétention) a un effet direct sur le montant des capitaux engagés par l'entreprise. De l'impact de la modification du montant des capitaux investis sur leur rentabilité dépendra le sens de la liaison entre *r* et *b*.

Deux éléments jouent un rôle essentiel sur le sens de la liaison éventuelle entre *r* et *b* : les conditions techniques de production, le type d'organisation du marché auquel appartient l'entreprise :

- en premier lieu, le sens de la liaison r = f(b) sera différent *selon que l'entreprise travaille* sur la base d'une échelle de production se situant *en deçà ou au-delà de son échelle de production optimale.* Si cette échelle actuelle de production de l'entreprise se situe en-deçà de son échelle de production optimale, toute expansion de celle-ci grâce à une politique de rétention , se traduira par une utilisation plus efficiente des facteurs de production et l'apparition d'économies d'échelles: tant que l'entreprise n'aura pas atteint cette échelle de production optimale, toute augmentation de la politique de rétention ira, si l'on prend comme seul élément de référence la productivité physique des facteurs, dans le sens d'une liaison positive entre r et b. Ce n'est que si l'entreprise dépassait l'échelle de production optimale que la liaison r = f (b) serait négative à la suite de l'apparition de déséconomies d'échelles.

- en second lieu, le sens de la liaison r = f (b) dépendra du *type d'organisation du marché* auquel appartient l'entreprise; si celle-ci travaille dans le cadre d'un marché de concurrence imparfaite, caractérisé par une courbe de demande de pente négative, toute augmentation de sa production devra s'accompagner d'une baisse des prix ; l'entreprise peut

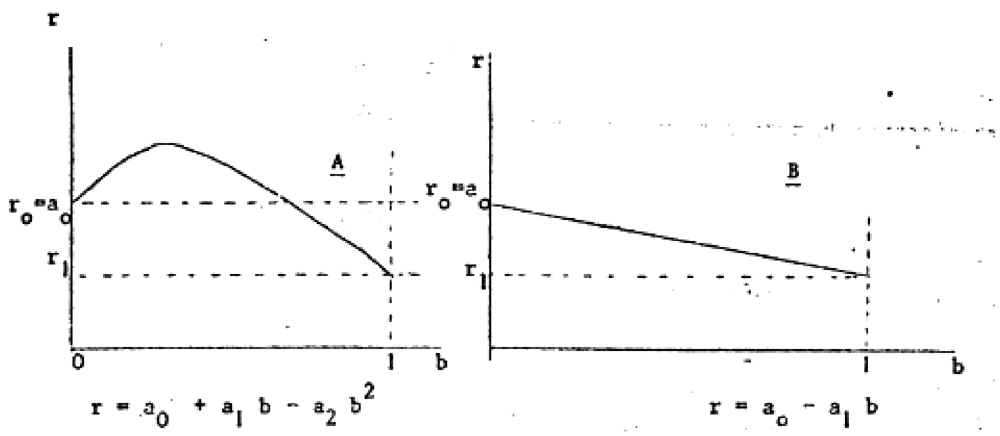
---

[3]nous nous appuierons ici sur l'analyse qui en a été faite par S.P. DOBROVOLSKY dans son ouvrage "The Economics of Corporate Finance" NEW-YORK ,Mc Graw-Hill, 1971

certes, plutôt qu'envisager une baisse de ses prix pour écouler sa production, préférer agir par divers moyens[4] pour déplacer sa courbe de demande dans un sens qui lui soit favorable: elle devra cependant dans ce cas supporter un alourdissement de ses coûts de vente, source d'une baisse de la rentabilité de ses investissements. Ainsi dans tous les cas peut-on s'attendre à une baisse du taux de rentabilité de l'entreprise.

La liaison réelle entre r et b sera la résultante de ces deux évolutions divergentes : si ces deux évolutions s'annulent on retrouve l'hypothèse du paragraphe précédent, c'est-à-dire l'indépendance de fait de r et b. Si, elles ne s'annulent pas, la liaison r = f (b) sera soit positive, soit négative, selon les caractéristiques de l'entreprise en question. Deux types d'évolution envisageables sont présentés graphiquement ci-dessous, accompagnés de leur formalisation mathématique :

GRAPHIQUE l0



Au premier type d'évolution A correspond une entreprise travaillant à l'origine à une échelle de production se situant en deçà de l'échelle de production optimale, pour qui une politique de rétention accrue signifie d'abord des économies d'échelles substantielles, et un taux de rentabilité en progrès jusqu'à ce que l'obtention de l'échelle de production optimale et les facteurs de marché renversent la tendance.

Au second type d'évolution correspond une entreprise travaillant déjà à son échelle de production optimale, et pour laquelle jouent exclusivement les facteurs de marché[5].

L'expression de la valeur d'une entreprise lorsqu'on incorpore explicitement une telle liaison entre r et b s'écrit :

$$P_0 = \frac{(1-b)Y_0}{k - b.r(b)} \qquad \text{avec} \qquad Y_0 = r_0 K_0$$

Cette valeur de P_0 sera maximum quand sa dérivée partielle par rapport à b, soit

[4] campagne de publicité ou de promotion des ventes

[5] C'est ce second type d'évolution que retiennent pour leur part E.M. LERNER et W.T. CARLETON avec leur fameuse courbe LC ou courbe d'opportunité des investissements (E.M. LERNER, W.T. CARLETON "A Theory of Financial Analysis NEW-YORK, Harcourt Brace Jovanovitch ,1966)

$$\frac{\partial P_0}{\partial b}$$

sera égale à 0[6], c'est-à-dire quand

$$\frac{\partial P_0}{\partial b} = \frac{-Y_0[k - b.r(b)] - \left[\left(-r(b) + \frac{\partial r(b)}{\partial b}.-b\right)\right](1-b)Y_0}{(k\_b.r(b))^2}$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial b} = \frac{Y_0\left[-k + b.r(b) + (1-b).r(b) + (1-b).b.\frac{\partial r(b)}{\partial b}\right]}{[k - b.r(b)]^2}$$

ou encore

$$\frac{\partial P_0}{\partial b} = \frac{Y_0}{[k - b.r(b)]}\left[r(b) - k + b.(1-b).\frac{\partial r(b)}{\partial b}\right] = 0$$

Puisque $\frac{Y_0}{[k - b.r(b)]^2}$ est toujours positif, il apparaît que l'expression ci-dessus $\frac{\partial P_0}{\partial b}$ sera nulle lorsque l'on aura

$$r(b) - k + b(1-b)\frac{\partial r(b)}{\partial b} = 0$$

et le taux de rétention optimal sera le taux b qui y correspondra.

a) Ainsi dans le cas d'une relation linéaire entre r et b du type $r = a_0 - a_1 b$, telle par exemple la relation $r = 0.15 - 0.10b$, (cas B précédent) le taux de rétention optimal est le taux b pour lequel on a:

$$0.15 - 0.10b - k + b(1-b)(-0.10) = 0$$

$$0.15 - k - 0.20b + 0.10b^2 = 0$$

Si nous prenons comme hypothèse supplémentaire que le taux de rendement requis par les actionnaires de la firme est de k = 0.10, il vient :

$$0.05 - 0.20b + 0.10b^2 = 0$$

Les solutions de cette dernière équation sont b_1=0.29 et b_2=1.71 Puisque b le taux de rétention cherché ne peut être compris qu'entre 0 et 1, seul le taux b_1 constitue une solution utile. La solution optimale pour les dirigeants de l'entreprise, consisterait donc dans ce

---

[6]On admet ici l'indépendance de k et b

cas à retenir chaque année 29% de leurs bénéfices nets, le reste étant distribué aux actionnaires, politique conduisant pour K_o=100 à une valeur de la firme égale à:

$$P_0 = \frac{(1-0.29)15}{0.10-(0.29)(0.12)} = 163$$

b) De même dans le cas d'une relation non linéaire entre r et b du type $r= a_0+a_1b-a_2 b^2$, telle par exemple la relation $r = 0.15 + 0.10b - 0.20b^2$ (du type A précédent) le taux de rétention optimal est le taux r pour lequel on a:

$$0.15 + 0.10b - 0.20b^2 - k + b(1-b)(0.10-0.40b) = 0$$

ou avec k = 0.10

$$0.05 + 0.20b - 0.70b^2 + 0.40b^3 = 0$$

Cette équation a deux racines réelles b_1=0.62 et b_2=1.46. Là encore la seule solution compatible avec les limites de variation de b, le taux de rétention , est b=0.62. La politique optimale consisterait ici pour les dirigeants de l'entreprise à distribuer 38% de leurs bénéfices et à en retenir 62%. La valeur maximale du prix de l'action serait alors de P = 350.

B- L'introduction d'une liaison k = f (b) *(r et b étant considérés comme indépendants*)

Nous venons de voir que le fait de remplacer r dans l'équation de GORDON par une relation r =f (b) conduisait à un taux de distribution-retention optimal parfaitement identifiable. Il convient de montrer qu'il en est de même lorsqu' est prise cette fois en considération l'autre alternative correspondant au remplacement de la constante k par une relation k = f (b).

C'est à la liaison éventuelle du taux de rendement requis par les actionnaires et de la politique de rétention des dirigeants que correspond cette relation k = f (b). C'est au niveau du sens de cette liaison que se sont d'ailleurs manifestées les plus grandes divergences dans la littérature économique et financière: rappelons à cet égard les positions respectives de M. J. GORDON, M.H. MILLER et F. MODIGLIANI ou R.C. HIGGINS analysées plus haut. Au terme de cette analyse nous avions conclu que en régime d'incertitude la densité relative des tests effectués allait plutôt en moyenne dans le sens d'une préférence des actionnaires en faveur des dividendes, et donc en faveur d'une liaison positive entre k et b.

Une telle relation pourrait par exemple prendre la forme suivante :

$$k = \alpha_0 + \alpha_1 b^2$$

Si nous remplaçons k par k =f (b) dans l'expression de la valeur de l'entreprise P_o ,il vient :

$$P_0 = \frac{(1-b)Y_0}{\alpha_0 + \alpha_1 b^2 - br} \qquad \text{avec } Y_0 = r_o K_o$$

Cette valeur de l'entreprise , dans le cas où r et b sont considérés comme indépendants, sera maximisée pour le taux de rétention b annulant $\frac{\partial P_0}{\partial b}$ c'est-à-dire pour:

$$\frac{\partial P_0}{\partial b} = \frac{Y_0}{\left(\alpha_0 + \alpha_1 b^2 - br\right)^2}\left[\alpha_1 b^2 - 2\alpha_1 b + r - \alpha_0\right] = 0$$

ou encore, puisque $\frac{Y_0}{\left(\alpha_0 + \alpha_1 b^2 - br\right)^2}$ est toujours positif , pour le taux de rétention b annulant l'expression entre crochets $\left[\alpha_1 b^2 - 2\alpha_1 b + r - \alpha_0\right]$

Il s'agit là d'une équation du second degré dont on peut aisément tirer les deux racines b_l et b_2.

Ainsi si nous supposons que cette relation k =f (b) est la suivante k=0.10 + 0.10 b^2 , P_o sera maximisée pour

$$0.10b^2 - 0.20b + r - 0.10 = 0$$

Si nous prenons comme hypothèse une entreprise dont le taux de rentabilité attendu des investissements futurs est r= 0.15 et dont le total des actifs en to est K_o, l'équation ci-dessus qui devient :

$$0.10b^2 - 0.20b + 0.05 = 0$$

a pour racines b_1= 0.29 et b_2 = 1.71

La solution optimale pour les dirigeants de l'entreprise serait donc dans ce cas de retenir 29% de ses bénéfices et d'en distribuer 71%. Une telle politique de rétention-distribution devrait conduire à une valeur maximale de:

$$P_0 = \frac{(1-0.29) \quad 15}{0.10 + 0.10(0.29)^2 - 0.15(0.29)} = 164$$

C. -L'introduction simultanée d'une liaison r=f(b) et d'une liaison k=f(b)

Nous nous limiterons ici au cas le plus général , celui où les fonctions r= f (b) et K =f (b) sont du type :

$r = a_0 + a_1 b - a_2 b^2$ ex: $r = 0.15 + 0.10b - 0.20b^2$

$k = \alpha_0 + \alpha_1 b^2$ ex: $k = 0.10 + 0.10b^2$

La valeur de l'entreprise P_o est alors dans ce cas:

:

$$P_0 = \frac{(1-b)Y_0}{\left(\alpha_0 + \alpha_1 b^2\right) - b\left(a_0 + a_1 b - a_2 b^2\right)}$$

Elle sera maximisée pour

$$\frac{\partial P_0}{\partial b} = \frac{Y_0}{\left[\alpha_0 + \alpha_1 b^2 - b\left(a_0 + a_1 b - a_2 b^2\right)\right]^2}\left[2a_2 b^3 + \left(\alpha_1 - a_1 - 3a_2\right)b^2 + \left(2a_1 - 2\alpha_1\right)b + a_0 - \alpha_0\right] = 0$$

et donc pour

$$2a_2 b^3 + \left(\alpha_1 - a_1 - 3a_2\right)b^2 + \left(2a_1 - 2\alpha_1\right)b + a_0 - \alpha_0 = 0$$

Si nous substituons dans l'expression ci-dessus aux coefficients a_0 , a_1 , a_2 , α_0 ,α_1 leurs valeurs dans l'exemple numérique, il vient :

$$0.40\ b^3 - 0.60\ b^2 + 0.05 = 0$$

dont la seule racine utile est proche de b = 0.33

La politique optimale des dirigeants de l'entreprise sera donc de retenir, dans ce cas précis, 33% des bénéfices, 67% de ces derniers étant distribués aux actionnaires, politique censée conduire à une valeur maximale de l'action de :

$$P_0 = \frac{(1-0.33)15}{0.10 + 0.10(0.33)^2 - 0.33\left[0.15 + 0.10(0.33) - 0.20(0.33)^2\right]} = 174$$

Nous venons là d'envisager trois hypothèses d'évolution des taux de rendement requis et taux de rentabilité des investissements avec le taux de rétention des bénéfices d'une société . Dans les trois cas nous avons montré qu'en présence d'hypothèses réalistes , tant en ce qui concerne l'évolution de la rentabilité future des investissements qu'en ce qui concerne l'attitude des actionnaires à l'égard de la politique de rétention des entreprises, existait bien un taux de distribution optimal maximisant la valeur boursière de l'entreprise. C'est ce taux de distribution optimal que devraient dans l'absolu retenir les dirigeants d'entreprises.

Bibliographie

S.P. Dobrovolsky *The Economics of Corporate Finance* NEW-YORK , Mc Graw-Hill, 1971

Gordon M.J. Optimal Investment and Financing Policy, JOURNAL OF FINANCE, May 1963, pp.264-272

Gordon M.J. The Savings,Investment and Valuation of a Corporation, THE REVIEW OF ECONOMICS AND STATISTICS, February 1962, pp.37-51

M.J. Gordon *The Investment, Financing and Valuation of a Corporation* , New York: Irwin 1962

E.M. Lerner et W.T. Carleton *A Theory of Financial Analysis* , NEW-YORK, Harcourt Brace Jovanovitch ,1966)