Annexe 2

ACTUALISATION ET TAUX D'INTERET CONTINU

. Le passage du taux d'intérêt par unité de temps au taux d'intérêt continu

Soit i le taux d'interêt annuel. Un capital c place à ce taux i fournit au bout de t années un capital C, tel que :

$$C = c(1+i)^t$$

Il s'agit là de la formule classique des intérêts composés, fondée sur les caractéristiques suivantes: l'intérêt n'est dû qu'après une certaine période qui est traditionnellement d'un an: le prêteur peut alors exiger les intérêts qui lui sont dus ou bien accepter que ces intérêts s'ajoutent au capital prêté pour produire intérêt à leur tour; c'est le procédé de *la capitalisation des intérêts*.

Mais, si l'on admet que les intérêts sont capitalisés, non plus une fois l'an, mais m fois l'an, la formule devient:

$$C' = c\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}$$

si $m = 1$, $C' = C$
si $m > 1$, $C' > C$
si $m < 1$, $C' < C$

Pour le montrer, il suffit de prendre l'exemple suivant : soit un capital de 100, placé pour *2 ans* au taux de 5 %.

Si les intérêts sont exigibles au terme de chaque année(m = 1), le capital disponible sera au bout de 2 ans de:

$$C_1 = 100\left(1+\frac{0.05}{1}\right)^{2x1} = 110.25$$

Si les intérêts sont payables tous les 6 mois (m = 2), et capitalisés,le capital disponible au bout de 2 ans sera de:

$$C_2 = 100\left(1+\frac{0.05}{2}\right)^{2x2} = 110.30$$

Si les intérêts ne sont payables qu'au bout de 2 ans ($m = \frac{1}{2}$) le capital disponible au bout de ces 2 années sera de:

$$C_3 = 100\left(1+\frac{0.05}{\frac{1}{2}}\right)^{2x\frac{1}{2}} = 110$$

On constate bien que: $C_3 < C_1 < C_2$

Plus les intérêts sont capitalisés de fois par période, plus le capital exigible, au terme de la durée de placement, est grand.

Le problème est de calculer quel taux *j* par unité de temps, la capitalisation s'effectuant *m* fois par unité de temps, équivaut à un taux *i* par unité de temps lorsque l'intérêt n'est capitalisé qu'une seule fois, c'est-à-dire le taux *j* tel que l'on ait *C' = C*

Cette égalité peut s'écrire:

$$\text{c}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mt} = \text{c}\ (1+k)^{t}$$

ou

$$\text{c}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} = \text{c}\ (1+k)$$

ou encore

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} = (1+k) \qquad \text{(I)}$$

Lorsque m tend vers l'infini, $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ tend lui-même vers une limite qui est le nombre e, approximativement égal à 2,718 281, et base des logarithmes népériens.

et l'équation (I) devient:

$$\text{e J} = 1+\text{i}$$

j s'appelle le *taux d'intérêt continu.*

ou encore si l'on raisonne en logarithmes népériens

$$\text{j} = \text{L}\ (1+\text{i})$$

. Critères de rentabilité et taux d'actualisation continu

Les formules de la valeur actuelle nette et du taux interne de rendement, peuvent être transformées de la façon suivante:

a) Valeur actuelle nette

$$G = \sum_{t=1}^{t=T}\frac{R_t - D_t}{(1+k)^t} + \frac{S_T}{(1+k)^T} - DEP_0$$

devient

$$\int_{t=0}^{t=T}(R_t - D_t)\,\text{e}^{-\pi t}\ \text{dt} + S_T\,\text{e}^{-\pi T} - DEP_0$$

Le taux d'actualisation continu correspondant à k est ici π.

b) <u>Taux interne de rendement</u>

De même

$$\sum_{t=1}^{t=T} \frac{R_t - D_t}{(1+r)^t} + \frac{S_T}{(1+r)^T} - D_0 = 0$$

se transforme en

$$\int_{t=0}^{t=T} (R_t - D_t)\, e^{-\rho t}\ dt + S_T\, e^{-\rho T} - D_0 = 0$$

De *r*, taux interne de rendement annuel, l'on est passé à ρ taux interne de rendement continu.

Le passage à la notion de taux d'intérêt continu est intéressant dans la mesure où il permet d'utiliser les propriétés du calcul différentiel. en particulier pour les problèmes de maximisation du profit... Entre les deux taux, taux périodique et taux continu, existe une relation simple, tirée de l'équation (II): j = L(1+i) Ceci permet, à tout moment, de raccrocher cette nouvelle notion. peu familière, à une autre qui l'est davantage.

Table de correspondance entre le taux d’intérêt périodique i et le taux d’intérêt continu j

i	..0	..1	..2	..3	..4	..5	..6	..7	..8	..9
0.01	**0.00995**	**0.01094**	**0.01193**	**0.01292**	**0.01390**	**0.02489**	**0.01587**	**0.01686**	**0.01784**	**0.01882**
0.02	**0.01903**	**0.02078**	**0.02176**	**0.02274**	**0.02372**	**0.02469**	**0.02567**	**0.02664**	**0.02761**	**0.02859**
0.03	**0.02956**	**0.03053**	**0.03150**	**0.03247**	**0.03343**	**0.03440**	**0.03537**	**0.03633**	**0.03730**	**0.03826**
0.04	**0.03922**	**0.04018**	**0.04114**	**0.04210**	**0.04306**	**0.04402**	**0.04497**	**0.04593**	**0.04688**	**0.04784**
0.05	**0.04879**	**0.04974**	**0.05069**	**0.05164**	**0.05259**	**0.05354**	**0.05449**	**0.05543**	**0.05638**	**0.05733**
0.06	**0.05827**	**0.05921**	**0.06015**	**0.06110**	**0.06204**	**0.06297**	**0.06391**	**0.06485**	**0.06579**	**0.06672**
0.07	**0.06766**	**0.06859**	**0.06953**	**0.07046**	**0.07139**	**0.07232**	**0.07325**	**0.07418**	**0.07511**	**0.07603**
0.08	**0.07696**	**0.07789**	**0.07881**	**0.07973**	**0.08066**	**0.08158**	**0.08250**	**0.08342**	**0.08434**	**0.08526**
0.09	**0.08618**	**0.08709**	**0.08801**	**0.08893**	**0.08984**	**0.09075**	**0.09167**	**0.09258**	**0.09349**	**0.09440**
0.10	**0.09531**	**0.09622**	**0.09713**	**0.09803**	**0.09894**	**0.09985**	**0.10075**	**0.10165**	**0.10256**	**0.10346**
0.11	**0.10436**	**0.10526**	**0.10616**	**0.10706**	**0.10796**	**0.10885**	**0.10975**	**0.11065**	**0.11154**	**0.11244**
0.12	**0.11333**	**0.11422**	**0.11511**	**0.11600**	**0.11689**	**0.11778**	**0.11867**	**0.11956**	**0.12045**	**0.12133**
0.13	**0.12222**	**0.12310**	**0.12399**	**0.12487**	**0.12575**	**0.12663**	**0.12751**	**0.12839**	**0.12927**	**0.13015**
0.14	**0.13103**	**0.13191**	**0.13278**	**0.13366**	**0.13453**	**0.13540**	**0.13628**	**0.13715**	**0.13802**	**0.13889**
0.15	**0.13976**	**0.14063**	**0.14150**	**0.14237**	**0.14323**	**0.14410**	**0.14497**	**0.14583**	**0.14669**	**0.14756**
0.16	**0.14842**	**0.14928**	**0.15014**	**0.15100**	**0.15186**	**0.15272**	**0.15358**	**0.15444**	**0.15529**	**0.15615**
0.17	**0.15700**	**0.15786**	**0.15871**	**0.15956**	**0.16042**	**0.16127**	**0.16212**	**0.16297**	**0.16382**	**0.16467**
0.18	**0.16551**	**0.16636**	**0.16721**	**0.16805**	**0.16890**	**0.16974**	**0.17059**	**0.17143**	**0.17227**	**0.17311**
0.19	**0.17395**	**0.17479**	**0.17563**	**0.17647**	**0.17731**	**0.17815**	**0.17898**	**0.17982**	**0.18065**	**0.18149**
0.20	**0.18232**	**0.18315**	**0.18399**	**0.18482**	**0.18565**	**0.18648**	**0.18731**	**0.18814**	**0.18897**	**0.18979**
0.21	**0.19062**	**0.19145**	**0.19227**	**0.19310**	**0.19392**	**0.19474**	**0.19557**	**0.19639**	**0.19721**	**0.19803**
0.22	**0.19885**	**0.19967**	**0.20049**	**0.20131**	**0.20212**	**0.20294**	**0.20376**	**0.20457**	**0.20539**	**0.20620**
0.23	**0.20701**	**0.20783**	**0.20864**	**0.20945**	**0.21026**	**0.21107**	**0.21188**	**0.21269**	**0.21350**	**0.21430**
0.24	**0.21511**	**0.21592**	**0.21672**	**0.21753**	**0.21833**	**0.21914**	**0.21994**	**0.22074**	**0.22154**	**0.22234**
0.25	**0.22314**	**0.22394**	**0.22474**	**0.22554**	**0.22634**	**0.22714**	**0.22793**	**0.22873**	**0.22952**	**0.23031**

exemples : à un taux d’intérêt périodique de 5.2% correspond un taux d’intérêt continu de 5.069%