

Annexe 4

METHODES D'IDENTIFICATION DES PROJETS A TAUX INTERNE DE RENDEMENT MULTIPLES

A l'origine de ces diverses méthodes notons l'article pionnier de J.H.LORIE et L.J.SAVAGE ¹ 'Three problems in Capital Rationing 'dans lequel ces derniers identifiaient trois problèmes en matière de choix d'investissement qui n'avaient pas ,à l'époque ,trouvé de solution satisfaisante : l'un de ces problèmes concernait la possibilité d'obtenir pour certaines séries de cashflows d'un projet d'investissement plusieurs taux de rentabilité du projet répondant à la définition d'un taux interne de rendement : en résultait une ambiguïté dans la réponse à donner concernant l'éventuelle rentabilité d'un tel projet d'investissement. Dans un tel cas de figure, quel taux était représentatif de la véritable rentabilité du projet d'investissement? A l'un des taux obtenus?(et dans ce cas,auquel ?) ou à aucun des taux obtenus ? :mais dans ce cas,comment évaluer la vraie rentabilité du projet d'investissement ?

Nous avons été amené il y a quelque temps ²à analyser quelques unes des solutions proposées pour résoudre ce type de situation: la méthode d'identification des projets à problème proposée par TEICHROEW,ROBICHEK et MONTALBANO ³,distinguant dans un premier temps les projets simples des projets non-simples, les derniers étant seuls susceptibles de conduire à des taux internes de rendement multiples,et dans un second temps les projets purs des projets mixtes,ces derniers étant les seuls projets pour lesquels on observait *effectivement* une multiplicité des taux internes de rendement. Pour distinguer les projets purs des projets mixtes , TEICHROEW,ROBICHEK et MONTALBANO faisaient appel à une procédure d'identification connue sous le nom de la Règle de SOPER. Cette règle de SOPER n'est toutefois que l'une des nombreuses règles concurrentes ayant été proposées dans la littérature financière pour répondre au défi posé par l'identification des projets à taux de rendement multiples; nous nous proposons ici de décrire quelques-unes de ces autres règles concurrentes .

Préalablement à la présentation de ces diverses règles ,il convient toutefois de présenter le lien existant entre la notion de taux interne de rendement et la notion de racine d'un polynôme en x de degré n ,élément de référence commun à l'ensemble des règles présentées.

I - LA RELATION TAUX INTERNE DE RENDEMENT/ RACINE D'UN POLYNOME en X de DEGRE n

Rappelons l'expression mathématique du taux interne de rendement d'un projet d'investissement:

$$r \text{ tel que } F_0 + \frac{F_1}{(1+r)} + \frac{F_2}{(1+r)^2} + \frac{F_3}{(1+r)^3} + \frac{F_4}{(1+r)^4} + \dots + \frac{F_n}{(1+r)^n} = 0$$

avec

F_0 la dépense initiale (négative) du projet

¹ J.H.LORIE,L.S.SAVAGE Three Problems in Capital Rationing ,JOURNAL OF BUSINESS, October 1955 ,pp.229-239

² A.GALESNE Les Décisions Financières de l'Entreprise:l'Investissement ,Paris:Dunod 1981

³ D.TEICHROEW,A.A.ROBICHEK ,M.MONTALBANO An Analysis of criteria for Investment and Financing Decisions under Certainty, MANAGEMENT SCIENCE ,January 1965, pp.395-403

F_t le cashflow annuel (positif, nul ou négatif) du projet pour l'année t
 n la durée de vie du projet
 et r le taux interne de rendement du projet

L'expression ci-dessus peut être réécrite, si nous multiplions tous les termes de l'équation par $(1+r)^n$:

$$F_0(1+r)^n + F_1 (1+r)^{n-1} + F_2 (1+r)^{n-2} + F_3 (1+r)^{n-3} + \dots + F_n = 0$$

Si, en outre, nous remplaçons $(1+r)$ par x il vient:

$$F_0 x^n + F_1 x^{n-1} + F_2 x^{n-2} + F_3 x^{n-3} + \dots + F_n = 0$$

ou plus généralement
$$f(x) = \sum_{t=0}^n F_t x^{n-t} = 0$$

polynôme en x de degré n ayant n racines réelles ou imaginaires dans l'intervalle $x \in [0, \infty)$ ⁴

Selon la règle des signes de DESCARTES, un polynôme en x de degré n aura **au plus** autant de racines réelles et positives entre 0 et $+\infty$ qu'il présentera de retournements de signe de ses cashflows, ou encore si l'on raisonne cette fois en terme de nombre de taux internes de rendement, à un polynôme en x de degré n correspondra **au plus** autant de taux internes de rendement dans l'intervalle $[-1, +\infty)$ ⁵ qu'il présentera de *retournements de signe de ses cashflows*

Si nous considérons le cas d'un projet d'investissement caractérisé par la série des cash-flows suivants:

-1000 400 400 400 500

le taux interne de rendement de ce projet est égal au taux r tel que:

$$\frac{400}{(1+r)^1} + \frac{400}{(1+r)^2} + \frac{400}{(1+r)^3} + \frac{500}{(1+r)^4} = 1000$$

équation correspondant, si l'on multiplie les 2 membres de l'équation par $(1+r)^4$, et si $x = (1+r)$, au polynôme:

$$f(x) = -1000 x^4 + 400 x^3 + 400 x^2 + 400 x + 500 = 0$$

Pour que ce projet d'investissement ait au moins un taux interne de rendement (positif) il suffit que la somme des cash-flows positifs soit supérieure à la dépense initiale, c'est-à-dire:

⁴ une autre solution aurait été de partir de l'équation de définition du TIR

$$r \text{ tel que } F_0 + \frac{F_1}{(1+r)} + \frac{F_2}{(1+r)^2} + \frac{F_3}{(1+r)^3} + \frac{F_4}{(1+r)^4} + \dots + \frac{F_n}{(1+r)^n} = 0$$

de donner à x la valeur $x = \frac{1}{1+r}$, conduisant alors également à un polynôme en x de degré n

$F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + F_4 x^4 + \dots + F_n x^n = 0$. L'une et l'autre de ces solutions ont été retenues par les divers auteurs ayant analysé ce problème de l'identification des TIRs multiples associés à une séquence de cashflows.

⁵ si $x = (1+r)$ à la limite $x = (1+r) = 0$ correspond $r = -1$; de même à la limite $x = (1+r) = +\infty$ correspond $r = +\infty$

$$\sum_0^5 F_t > 0$$

Puisqu'ici $\sum_0^5 F_t = 700$ le projet en question aura bien **au moins** un taux interne de rendement positif.

Par ailleurs, compte tenu de la règle des signes de DESCARTES, il aura **au plus** un taux interne de rendement réel entre -1 et $+\infty$ puisque le nombre de retournements de signe des cash-flows est de un. Dès lors le projet en question ne peut avoir qu'un seul taux interne de rendement. Nous avons pu vérifier que ce taux interne de rendement unique était de 24.21 %

Toute autre est la situation d'autres projets dont la séquence de cash-flows présente plusieurs retournements de signe, pouvant conduire potentiellement à une multiplicité de leur taux interne de rendement: c'est à l'analyse des principales méthodes proposées pour distinguer les projets à taux interne de rendement unique des projets à taux internes de rendement multiples que nous allons nous intéresser maintenant.

II- PRESENTATION DE QUELQUES METHODES D'IDENTIFICATION DES PROJETS D'INVESTISSEMENT A TAUX INTERNES DE RENDEMENT MULTIPLES.

Envisageons le projet d'investissement suivant caractérisé par la séquence de cash-flows

F ₀	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅
-160	688	-954	506	-215	150

Pour que ce projet ait au moins un taux interne de rendement positif, il suffit que

$$\sum_0^5 F_t > 0$$

ici $\sum_0^5 F_t = 15$ donc il y a au moins un TIR

Reste à déterminer s'il est unique.

1° LA REGLE DE SOPER⁶

objectif recherché: estimer le nombre de taux internes de rendement dans l'intervalle $[-100\%, +\infty]$

méthode proposée: Les principales étapes de la méthode proposée par SOPER sont les suivantes:

-1ère étape : calcul de r , un taux répondant à la définition du taux interne de rendement

ici $\sum_0^5 F_t = 15$ donc puisque $\sum_0^5 F_t > 0$ existe au moins un TIR positif

⁶ C.S.SOPER The Marginal Efficiency of Capital: a Further Note, ECONOMIC JOURNAL, March 1959, pp.174-177

L'utilisation de l'un ou l'autre des algorithmes de calcul du taux interne de rendement donne ici $r = 25\%$

2ème étape: calcul des balances successives du projet aux différentes étapes de la vie du projet (de l'année 0 à l'année n-1 ,ici la quatrième année)

$$\begin{aligned} S_0(r) &= F_0 \\ S_1(r) &= S_0(r)(1+r) + F_1 \\ S_2(r) &= S_1(r)(1+r) + F_2 \\ S_3(r) &= S_2(r)(1+r) + F_3 \\ S_4(r) &= S_3(r)(1+r) + F_4 \end{aligned}$$

et observation des signes de s_t $S_t(r) = 0,1,2,\dots,n-1$

si la séquence des signes des balances ne présente aucun retournement de signe (signe négatif quelle que soit la balance considérée) alors le projet n'a qu'un TIR

si la séquence des signes des balances présente au moins un retournement de signe (signe négatif devenant positif au cours de la période) on aura affaire à un projet ayant plusieurs taux internes de rendement. Plus précisément ,selon SOPER, le nombre des TIR présumés sera égal au nombre de changements de signe de la séquence des $S_t(r) = 0,1,2,\dots,n-1$ augmenté d'une unité.

Application au projet considéré

il vient:

$$\begin{aligned} S_0(25\%) &= -160 \\ S_1(25\%) &= -160(1+0.25) + 688 = +488 \\ S_2(25\%) &= +488(1+0.25) - 954 = -344 \\ S_3(25\%) &= -344(1+0.25) + 506 = +76 \\ S_4(25\%) &= +76(1+0.25) - 215 = -120 \end{aligned}$$

avec 4 changements de signe dans la séquence ,on en déduit que le projet a, selon la règle de SOPER, 5 taux internes de rendement entre -100% et $+\infty\%$.

2° LA REGLE DE NORSTROM ⁷

objectif recherché: identifier le nombre de TIRs (racines réelles) entre 0% et $+\infty\%$,c'est-à-dire exclusivement les seuls TIRs positifs

méthode proposée:

hypothèses: $F_0 < 0$ et $F_n \neq 0$

Dans ces conditions ,selon NORSTROM ,pour que r soit unique et non négatif,il suffit que la série des cash-flows cumulés A_t pour $t= 0,1,2,\dots,n$ ne présente qu'un seul changement de signe, A_n étant par ailleurs non nul.

⁷ C.NORSTROM A Note on Mathematical Analysis of rates of return under certainty, MANAGEMENT SCIENCE Jan. 1967 pp.429 et suivantes.

C.NORSTROM A Sufficient condition for a Unique non negative internal rate of return ,JOURNAL OF FINANCIAL AND QUANTITATIVE ANALYSIS, June 1972, pp.1835-1838

Pour un projet dont les flux sont F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 et F_5 avec $F_0 < 0$ et $F_5 \neq 0$ la série des A_t est:

$$A_0 = F_0$$

$$A_1 = F_0 + F_1$$

$$A_2 = F_0 + F_1 + F_2$$

$$A_3 = F_0 + F_1 + F_2 + F_3$$

$$A_4 = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

$$A_5 = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5$$

application:

Pour le projet considéré dont les cash-flows sont -160,688,-954,506,-215,150 la série des A_t est:

$$A_0 = -160$$

$$A_1 = -160 + 688 = + 528$$

$$A_2 = -160 + 688 - 954 = - 426$$

$$A_3 = -160 + 688 - 954 + 506 = + 80$$

$$A_4 = -160 + 688 - 954 + 506 - 215 = - 135$$

$$A_5 = -160 + 688 - 954 + 506 - 215 + 150 = + 15$$

la séquence des A_t pour $t = 0,1,2,\dots,5$ présentant 5 retournements de signe ,laisse donc présumer ,selon la règle de NORSTROM,pour le projet considéré 5 taux internes de rendement.

3° LA REGLE DE KAPLAN⁸

objectif recherché: identifier le nombre de TIRs (racines réelles) entre deux limites a et b (a et b étant des nombres positifs)

méthode proposée:

La règle de KAPLAN correspond à une application d'un théorème connu sous l'appellation de 'Théorème de STURM'

' Si un polynome $f(x)$ n'a pas de racines multiples et que $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$, alors le nombre de ses racines réelles dans l'intervalle $a < x < b$,est égal *exactement* au nombre des changements de signe dans la suite de STURM du polynome $f(x)$ lors du passage de $x = a$ à $x = b$

La suite de STURM étant:

$$f(x), f'(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_m(x)$$

avec:

$f(x)$ le polynome initial

$f'(x)$ la dérivée première du polynome initial

$f_2(x)$ le reste (après changement de signe) de la division $\frac{f(x)}{f'(x)}$

$f_3(x)$ le reste (après changement de signe) de la division $\frac{f'(x)}{f_2(x)}$

⁸ S.KAPLAN A note on a method for precisely determining the uniqueness or non uniqueness of the internal rate of return for a proposal investment ,JOURNAL OF INDUSTRIAL ENGINEERING, Jan-Feb. 1965, pp.70-71

$f_4(x)$ le reste (après changement de signe) de la division $\frac{f_2(x)}{f_3(x)}$
 etc ...

Application au cas du projet

Fo	F1	F2	F3	F4	F5
-160	+ 688	-954	+506	-215	+150

Le TIR du projet est le taux r tel que:

$$-160 + \frac{688}{(1+r)^1} - \frac{954}{(1+r)^2} + \frac{506}{(1+r)^3} - \frac{215}{(1+r)^4} + \frac{150}{(1+r)^5} = 0$$

si nous définissons $x = 1/(1+r)$, il vient:

$$-160 + 688x - 954x^2 + 506x^3 - 215x^4 + 150x^5 = 0$$

ou encore

$$f(x) = 150x^5 - 215x^4 + 506x^3 - 954x^2 + 688x - 160 = 0$$

Les éléments successifs de la suite de STURM relative au projet concerné sont dès lors:

$$f(x) = 150x^5 - 215x^4 + 506x^3 - 954x^2 + 688x - 160$$

$$f'(x) = 750x^4 - 860x^3 + 1518x^2 - 1908x + 688$$

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = 0.20x - 0.0573333 \quad \text{reste} = 153,09x^3 - 485,37x^2 + 441x -$$

$$120,55$$

$$-(\text{reste}) = -153,09x^3 + 485,37x^2 - 441x +$$

$$120,55$$

$$f_2(x) = -153,09x^3 + 485,37x^2 - 441x + 120,55$$

$$\frac{f'(x)}{f_2(x)} = -4,899079x - 9,91489 \quad \text{reste} = 4170x^2 - 5690x + 1883,24$$

$$-(\text{reste}) = -4170x^2 + 5690x - 1883,24$$

$$f_3(x) = -4170x^2 + 5690x - 1883,24$$

$$\frac{f_2(x)}{f_3(x)} = 0.036712x - 0.06663 \quad \text{reste} = 5,39x - 4,31$$

$$-(\text{reste}) = -5,39x + 4,31$$

$$f_4(x) = -5,39x + 4,31$$

$$\frac{f_3(x)}{f_4(x)} = 773.655x - 437.02 \quad \text{reste} = 0$$

$$-(\text{reste}) = 0$$

$$f_5(x) = 0$$

Il reste alors à évaluer les valeurs de $f(x)$, $f'(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$, $f_5(x)$ pour les deux valeurs retenues a et b (pour rechercher les TIRs se situant entre 0 % et + ∞ %)

x	f(x)	f'(x)	f ₂ (x)	f ₃ (x)	f ₄ (x)	f ₅ (x)	Nombre de changements de signe
a=0 ⁹	-160	688	120,55	-1883,24	4,31	0	f(0) = 3
b=1 ₁₀	15	188	11,83	-363,24	-1,08	0	f(1) = 1

la différence de f(0) et de f(1) étant de 2, on peut en conclure, selon la règle de KAPLAN que le projet possède exactement 2 TIRs positifs distincts. Puisque le dernier élément de la suite, ici $f_5(x)$, est nul, on peut, en outre, en conclure que l'un de ces TIRs correspond à une racine double.

4 ° LA REGLE DE JEAN¹¹

objectif recherché: identifier le nombre de TIRs (racines réelles) entre deux limites a et b

méthode proposée:

La règle de JEAN est une application d'un théorème connu sous le nom de 'Théorème de BUDAN-FOURRIER'

Théorème de BUDAN-FOURRIER

' Soient deux nombres a et b (avec $a < b$) qui ne sont pas des racines du polynôme de degré n. Alors le nombre de racines réelles de l'équation $f(x) = 0$ est égal :

- au nombre minimal ΔN ($\Delta N = N(a) - N(b)$) des changements de signe de la suite des dérivées successives lors du passage de $x = a$ à $x = b$
- ou inférieur au nombre ΔN d'un nombre pair '

Application au projet -160 ,688 , -954 , 506 , -215 ,150

Il convient dans un premier temps de calculer les éléments de la suite des dérivées successives du polynôme f(x) correspondant au projet concerné

$$f(x) = 150x^5 - 215x^4 + 506x^3 - 954x^2 + 688x - 160 = 0$$

c'est-à-dire:

$$f'(x) = 750x^4 - 860x^3 + 1518x^2 - 1908x + 688$$

$$f''(x) = 3000x^3 - 2580x^2 + 3036x - 1908$$

$$f'''(x) = 9000x^2 - 5160x + 3036$$

$$f''''(x) = 18000x - 5160$$

$$f''''''(x) = 18000$$

⁹ à a = 0 correspond $r = +\infty$: en effet si $x = a = 0$, puisque $x = 1/(1+r)$, on a $x = 1/(1+r) = 0$; or cette égalité n'est obtenue que pour $r = +\infty$

¹⁰ à a = 1 correspond $r = 0$; en effet si $x = b = 1$ on a $1/(1+r) = 1$ entraînant $r = 0$

¹¹ W.H JEAN On Multiple rates of return, JOURNAL OF FINANCE, March 1968, pp.187-192
et W.H.JEAN On Multiple rates of return : reply, JOURNAL OF FINANCE, March 1969, pp.99-100

puis ,dans un deuxième temps, d'évaluer les valeurs prises par ces différentes dérivées pour $x = a$ et pour $x = b$ (avec $a < b$)

Si nous retenons pour valeurs de x ($a = 0$) et ($b = 1$) il vient:

x	f (x)	f '(x)	f ''(x)	f '''(x)	f ''''(x)	f ''''''(x)	Nombre de changements de signe
a = 0	- 160	688	-1908	3036	- 5160	18000	N(a) = 5
b = 1	15	188	1548	6876	12840	18000	N(b) = 0

ΔN étant de 5 ,la règle de JEAN identifie 5 TIRs (1ère version) ou 3 TIRs (5-2) voire 1 TIR (5-4) si l'on retient la seconde version de la règle. Notons toutefois le caractère ambigu de la règle de JEAN qui ,dans cet exemple tout au moins, ne permet pas d'identifier le caractère unique/ multiple du nombre de TIRs.

5° LA REGLE DE DE FARO ¹²

objectif recherché :identifier le nombre de TIRs (racines réelles) entre 0 % et + ∞ % ,c'est-à-dire les seuls TIRs positifs d'un projet d'investissement.

méthode proposée:

La règle de DE FARO est une application d'un théorème connu sous le nom de 'Théorème de VINCENT'

Théorème de VINCENT

' La condition suffisante pour que r soit unique dans l'intervalle $[0 , + \infty]$ est que la série

$A_{n+1,0} , A_{n,1} , A_{n-1,2} , A_{n-2,3} , \dots , A_{2,n-1} , A_{1,n}$
ait *exactement* un changement de signe.'

¹² C.DE FARO est l'un des auteurs ayant analysé le problème de la multiplicité des TIRs avec le plus d'insistance Cette spécificité l'a conduit à proposer plusieurs règles concurrentes d'identification des projets à TIR multiples: parmi ses contributions notons

C. DE FARO On the internal rate of return , THE ENGINEERING ECONOMIST, Spring 1974, pp.165-194

C.DE FARO On the internal rate of return :reply,THE ENGINEERING ECONOMIST, Winter 1976 pp.145-146 C.DE FARO A sufficient condition for a unique non negative internal rate of return: a comment ,JOURNAL OF FINANCIAL AND QUANTITATIVE ANALYSIS, September 1973, pp.683-684

C.DE FARO A sufficient condition for unique non negative internal rate of return :further comments, JOURNAL OF FINANCIAL AND QUANTITATIVE ANALYSIS, September 1978, pp.557-584

C.DE FARO et L.SOARES A Flexible sufficient condition for a unique non negative internal of return ,THE ENGINEERING ECONOMIST, Winter 1978, pp.117-127

Après examen de ces diverses règles concurrentes ,a été retenue par nous celle qui s'est avérée la plus efficace, celle correspondant à l'application du théorème de VINCENT.

Représentation matricielle des $A_{i,j}$

N° colonne j →	0	1	2	...	j	...	n
	F_0	F_1	F_2	...	F_j	...	F_n
N° ligne i ↓							
1							
2							
3							
...							
i				$A_{i,j-1}$	$A_{i,j}$		
...							
n							
n+1							

avec $A_{i,j} = A_{i,j-1} + A_{i-1,j}$

Application au cas du projet -160,688,-954,506,-215,150 n =5

n0 colonne →	0	1	2	3	4	5	
	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	
N° ligne ↓	-160	688	-954	506	-215	150	
1	-160	528	-426	80	-135	<u>15</u>	
2	-160	368	-58	22	<u>-113</u>		
3	-160	208	150	<u>172</u>			
4	-160	48	<u>198</u>				
5	-160	<u>-112</u>					
6	<u>-160</u>						

A la séquence de Vincent, à savoir

$$A_{n+1,0}, A_{n,1}, A_{n-1,2}, A_{n-2,3}, \dots, A_{n-3,4}, A_{n-4,5}$$

ou puisque $n = 5$

$$A_{6,0}, A_{5,1}, A_{4,2}, A_{3,3}, A_{2,4}, A_{1,5}$$

correspond la suite des chiffres soulignés

$$-160, -112, 198, 172, -113, 15$$

suite où l'on constate 3 retournements de signe, donc 3 TIRs positifs.

6° LA REGLE DE BEZZA¹³

objectif recherché: identifier le nombre de TIRs positifs d'un projet d'investissement compris entre 0% et +∞ %

méthode proposée:

E.M.BEZZA fait appel à la *notion d'intérêts cumulés* associés à un projet

. La notion d'intérêts cumulés

Envisageons un projet d'investissement de cash-flow $F_0, F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$. Son taux interne de rendement sera le taux r tel que

$$f(r) = F_0 + \frac{F_1}{(1+r)} + \frac{F_2}{(1+r)^2} + \frac{F_3}{(1+r)^3} + \dots + \frac{F_n}{(1+r)^n} = 0$$

ou

$$f(r) = F_0(1+r)^n + F_1(1+r)^{n-1} + F_2(1+r)^{n-2} + F_3(1+r)^{n-3} + \dots + F_n = 0$$

c'est-à-dire r tel que la valeur future de l'ensemble des capitaux investis au taux r soit nulle.

Cette valeur future peut être interprétée comme la somme de deux séries de flux, d'une part les cash-flows du projet lui-même, et d'autre part les intérêts cumulés tirés du réinvestissement de ces cash-flows au taux r tout au long de la durée de vie du projet; on peut estimer ces intérêts cumulés flux après flux à :

$F_0(1+r)^n - F_0$	pour le flux F_0
$F_1(1+r)^{n-1} - F_1$	pour le flux F_1
$F_2(1+r)^{n-2} - F_2$	pour le flux F_2
.....	
$F_n - F_n$	pour le flux F_n

soit au total pour l'ensemble de la période à la date n

$$D_n = \sum_{t=0}^{t=n} [F_t(1+r)^{n-t} - F_t] = \sum_{t=0}^{t=n} F_t[(1+r)^{n-t} - 1]$$

ou plus généralement à la fin de chaque année t comprise entre 0 et n

$$D_t = \sum_{j=0}^{j=t} F_t[(1+r)^{t-j} - 1] \quad \text{pour } t = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

par exemple:

$$\begin{aligned} \text{pour } t = 0 \quad D_0 &= F_0 [(1+r)^{0-0} - 1] = F_0 [1 - 1] = 0 \\ \text{pour } t = 1 \quad D_1 &= F_0 [(1+r)^{1-0} - 1] + F_1 [(1+r)^{1-1} - 1] = F_0[(1+r)^1 - 1] + F_1 \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

¹³ E.M.BEZZA Le problème de la multiplicité des taux internes de rendement :examen critique, Mémoire de DEA Finance, Rennes, Décembre 1981

et E.M.BEZZA Le concept d'intérêts cumulés: un nouvel algorithme pour dépasser le problème de la multiplicité des TIRs, ECONOMIES ET SOCIETES (série SCIENCES DE GESTION), n° 11-12, 1981, pp.99-132

Selon E.M. BEZZA, l'identification du nombre de TIRs réels et positifs dans l'intervalle $[0, +\infty]$ résulte de l'observation du nombre de changements de signe de la séquence des D_t (calculés à partir d'un taux r répondant à la définition du taux interne de rendement):

- si aucun changement de signe n'est observé dans la séquence, on a affaire à un TIR unique

- si plusieurs changements de signe sont observés, on doit s'attendre à un nombre de TIRs égal au nombre de changements de signe augmenté d'une unité.

. Application au projet -160,688,-954,506,-215,150

1ère étape :calcul d'un taux r répondant à la définition d'un taux interne de rendement , $r=25\%$ dans le cas présent.

2ème étape:calcul des D_t pour $t=0,1,2,3,4,5$

$$D_0 = -160 [(1+0.25)^0 - 1] = 0$$

$$D_1 = -160 [(1+0.25)^1 - 1] + 688 [(1+0.25)^0 - 1] = -40$$

$$D_2 = -160 [(1+0.25)^2 - 1] + 688 [(1+0.25)^1 - 1] - 954 [(1+0.25)^0 - 1] = +82$$

$$D_3 = -160 [(1+0.25)^3 - 1] + 688 [(1+0.25)^2 - 1] - 954 [(1+0.25)^1 - 1] + 506 [(1+0.25)^0 - 1] = -2,5$$

$$D_4 = -160 [(1+0.25)^4 - 1] + 688 [(1+0.25)^3 - 1] - 954 [(1+0.25)^2 - 1] + 506 [(1+0.25)^1 - 1] - 215 [(1+0.25)^0 - 1] = +14,5$$

$$D_5 = -160 [(1+0.25)^5 - 1] + 688 [(1+0.25)^4 - 1] - 954 [(1+0.25)^3 - 1] + 506 [(1+0.25)^2 - 1] - 215 [(1+0.25)^1 - 1] + 150 [(1+0.25)^0 - 1] = -14,25$$

La séquence des D_t pour $t=0,1,2,3,4,5$ est ici de:

0, -40, +82, -2.5, +14.5, -14.25

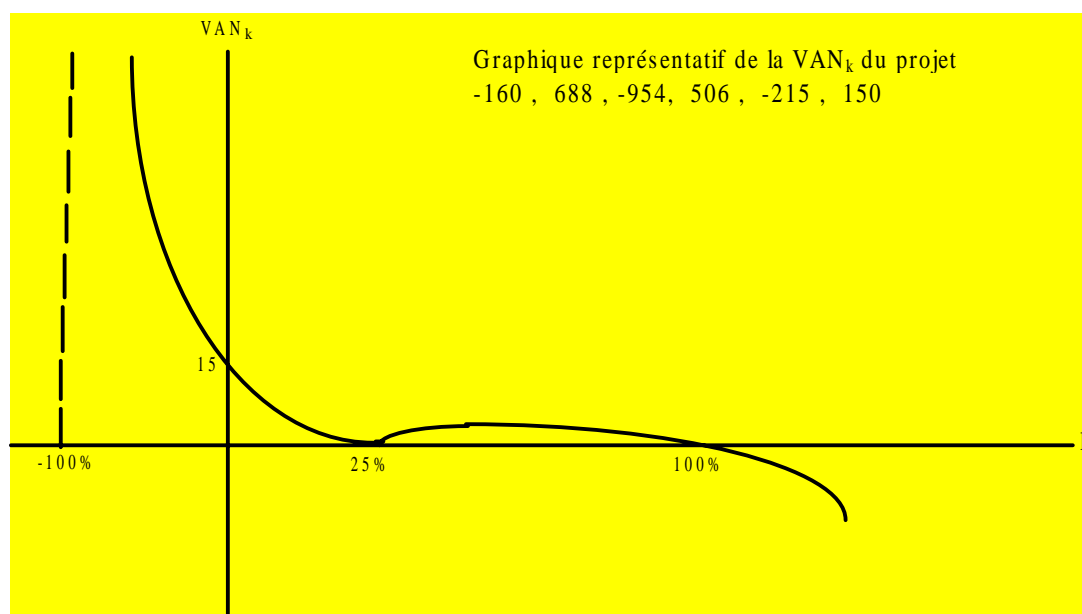
Présentant 4 retournements de signe, la séquence conduit à l'identification de 5 TIRs réels et positifs compris entre 0% et $+\infty\%$

III- ANALYSE DU PROJET DE CASH FLOWS -160,+688,-954,506,-215,150

Avant de procéder à l'analyse des *performances relatives* des diverses méthodes précédentes quant à l'identification du nombre exact de TIRs que présente le projet concerné, il est utile d'identifier les divers TIRs du projet en question.

Un moyen commode de détecter ces divers TIRs est de procéder à la représentation graphique de la VAN_k du projet pour des valeurs de k allant de 0 à $+\infty$, voire de -100% à $+\infty\%$. La courbe d'évolution de cette VAN_k est présentée sur le graphique suivant:

Graphique 1 Evolution de la VAN_k du projet sur l'intervalle d'évolution de k [- 100% ,+ ∞ %]



Nous avons préalablement évalué un premier taux répondant à la définition d'un taux interne de rendement: il s'agissait de $r = 25\%$. Nous retrouvons ce taux $r = 25\%$ parmi les taux internes de rendement du projet. Toutefois il n'est pas seul; la courbe d'évolution de la VAN_k montre en effet que le projet a 2 taux internes de rendement distincts 25% et 100% , ou 3 taux internes de rendement si l'on compte pour deux solutions différentes la racine double 25% , entre -100% et $+\infty\%$ ¹⁴

Il nous est dès lors possible d'apprécier le pouvoir prédictif des diverses méthodes précédentes en matière d'identification des TIRs du projet concerné.

¹⁴ ou entre 0% et $+\infty\%$ puisque dans le cas de ce projet l'évolution de la courbe VAN_k entre -100% et 0% montre qu'il n'y a aucune intersection de cette courbe avec l'axe des k

IV- ANALYSE DES PERFORMANCES DES DIVERSES REGLES PRECEDENTES SUR L'EXEMPLE ETUDIE

Le tableau ci-dessous nous permet d'effectuer cette comparaison des règles précédentes:

∞ %	- la règle de SOPER	en identifie 5	entre -100 % et +
	- la règle de NORSTROM	en identifie 5	entre 0 % et + ∞ %
	- la règle de KAPLAN	en identifie 2 distincts dont 1 double	entre 0 % et + ∞ %
	- la règle de JEAN	en identifie 5 (ou 3) (ou 1)	entre 0 % et +∞ %
selon	la variante retenue		
	- la règle de DE FARO	en identifie 3	entre 0 % et + ∞ %
%	- la règle de BEZZA	en identifie 5	entre 0 % et + ∞

Dans une première approche, apparaissent les plus pertinentes ,dans le cadre de cet exemple

la règle de KAPLAN tout d'abord qui non seulement a identifié le nombre exact de TIRs (3) mais a aussi identifié le nombre exact de TIRs distincts.

la règle de DE FARO ensuite qui identifie correctement le nombre exact de TIRs

les autres règles enfin qui en identifient 5 au lieu des 3 observés .

Notons cependant que si l'on réserve les termes de la comparaison au seul problème de l'identification du caractère, 'projet à taux unique /projet à taux multiples',il apparait que l'ensemble des règles¹⁵ répondent bien à leur objectif affiché ,à savoir identifier si un projet a un TIR unique ou au contraire des TIRs multiples : dans le cas présent ,en effet, toutes concluent à l'existence de taux internes de rendement multiples et à l'identification d'une situation où l'usage du TIR est déconseillé.

Notons encore toutefois qu'une analyse plus fouillée des comparaisons des diverses règles précédentes est nécessaire avant de pouvoir conclure dans un sens ou dans l'autre: la comparaison précédente ne portait que sur un seul projet ; une extension à un échantillon de situations plus vaste nous parait nécessaire ; en outre ,sur la base de cet échantillon plus représentatif des situations que l'on peut rencontrer dans la vie des affaires, nous parait-il nécessaire d'identifier les divers types d'erreurs auxquelles conduit l'usage répété de ces diverses règles dans des conditions variées. L'analyse de l'ensemble de ces points fera l'objet de la section suivante.

V- ELARGISSEMENT DE LA COMPARAISON SUR UN PLUS GRAND NOMBRE DE PROJETS

¹⁵ à l'exception de la règle de JEAN qui,à cet égard apparait ambiguë puisqu'elle ne permet pas d'opérer cette distinction si l'on retient la dernière de ses variantes

Nous nous référons cette fois à un ensemble de 24 projets, les uns n'ayant qu'un seul taux interne de rendement ,les autres en ayant plusieurs. C'est à l'ensemble des projets concernés qu'ont été appliquées les diverses règles précédentes; le résultat obtenu est présenté dans le tableau suivant:

TABLEAU 1 MÉTHODES D'IDENTIFICATION D'UNE MULTIPLICITÉ DES TIR

Domaine d'analyse					-1,+∞	0,+∞					
1	2	3	4	5	$\sum_0^n F_t$	Règle de SOPER S_t	Règle de NORSTROM A_t	Règle de DE FARO (Vincent)	Règle de JEAN (Budan Fourrier))	Règle de KAPLAN (Sturm)	Règle de BEZZA D_t
1 900	2 000	4 400			7 300	1	1	1	1	1	1
400	400	400	500		700	1	1	1	1	1	1
400	400	- 100	500		200	1	1	1	3 (a)	1	1
1 232	- 1 580	675			7	3	3	3	3	1 (b)	3
850	889	- 1 514	312		- 63	3	2	2	2	2	-
640	- 370	- 250	60		- 120	3	2	2	2	2	-
260	- 260	130	- 20		30	4 (g)	3 (a)	1	3 (a)	1	3 (a)
688	- 954	506	- 215	150	15	5 (g)	5 (g)	3	5 (g)	2 distinctes dont 1 double	5 (g)
8	- 16	8	32		29	3 (a)	3 (a)	1	2 (a)	1	1
1 100	- 180	840			760	1	3 (a)	1	3 (a)	1	1
5 000	- 1 000				4 000	2	1	1	1	1	1
0 000	- 10 000				- 1 600	2	2	2	2	2	-
0 000	- 20 000				- 1 800	2	2	2	2	2	-
4 000	- 4 000				- 1 200	2 (d)	2 (d)	2 (d)	2 (d)	0	-
40	- 40				- 10	2	2	2	2	1 distincte dt 1 double	-
80	2 628	143	135		1 386	1	1	1	1	1	1
0	46	- 19	30		25	1	3 (a)	1	3 (a)	1	1
38	- 22	15			7	3 (a)	3 (a)	1	3 (a)	1	1
49	- 45	18			2	3 (a)	3 (a)	1	3 (a)	1	3 (a)
1 296	- 1 596	415	225		20	3	3	3	3	2 distinctes dt 1 double	3
90	90	90	- 80		10	2	1	1	1	1	1
900	100	600	- 800		300	2	1	1	1	1	1
1 152	- 1 680	800			16	3	3	3	3	2 distinctes dt 1 double	3
876	- 522	- 1 266	- 144	120	- 1 080	3	2	2	2	2	-

(a,b,d,f,g) échecs d'identification avec identification de la nature de l'erreur

Ces résultats obtenus, connaissant le nombre effectif de TIRs des projets au terme d'une série de représentations graphiques de l'évolution de la van de chacun des projets sur l'intervalle $[-100\%, +\infty\%]$, il nous est possible d'identifier les éventuelles erreurs associées à chacune des règles concernées quant au nombre de TIRs déclarés et en conséquence d'apprécier la qualité prédictive de chacune des règles suggérées.

Il convient toutefois, avant tout classement des règles concernées, de bien vouloir préciser le champ de la comparaison:

- en effet, on pourrait être tenté de présenter un classement des règles précédentes en se référant au seul critère 'identification du nombre exact de TIRs du projet étudié'. Si l'on s'en tenait à ce critère, on serait amené à ranger les méthodes précédentes dans l'ordre suivant:

- la règle de KAPLAN (23 réussites, 1 échec)
- la règle de DE FARO (23 réussites, 1 échec)
- la règle de BEZZA (21 réussites¹⁶, 3 échecs)
- la règle de SOPER (18 réussites, 6 échecs)
- la règle de NORSTROM (16 réussites, 8 échecs)
- la règle de JEAN (15 réussites, 9 échecs)

- toutefois l'adoption de ce seul critère ne nous paraît pas équitable; et ce pour deux raisons :

° la première résulte du fait que l'objectif de toutes les règles présentées est moins d'identifier le nombre exact des TIRs du projet concerné, que d'identifier le risque de multiplicité du TIR du projet (savoir si le projet n'a qu'un seul taux interne de rendement auquel cas l'usage du TIR est possible pour l'estimation de la rentabilité du projet, ou au contraire plusieurs TIRs avec dans ce cas l'impossibilité de faire appel au TIR pour l'estimation de la rentabilité du projet.) .En d'autres termes, on pourrait dire que l'identification de la multiplicité du TIR est un objectif **essentiel**, l'identification du nombre exact de TIRs lorsqu'il y en a plusieurs n'ayant qu'un caractère accessoire. Si l'on ne tenait compte que du caractère essentiel ci-dessus le nouvel ordre de classement resterait:

- la règle de KAPLAN (23 réussites, 1 échec)
- la règle de DE FARO (23 réussites, 1 échec)
- la règle de BEZZA (22 réussites, 2 échecs)
- la règle de SOPER (20 réussites, 4 échecs)
- la règle de NORSTROM (17 réussites, 7 échecs)
- la règle de JEAN (15 réussites, 9 échecs)

° la seconde tient au fait qu'un classement équitable des méthodes présentées nécessite de ne pas s'en tenir à une simple comptabilisation des erreurs observées mais au contraire de *tenir compte de la gravité de l'erreur éventuelle*. Or de ce point de vue toutes les erreurs induites par les règles précédentes ne sont pas d'égale importance ; à cet égard pourraient être identifiées 5 types d'erreurs:

- . identification de 2 ou plusieurs TIRs alors qu'il n'y en a qu'un (erreur de type a)
- . identification d' 1 seul TIR alors qu'il y en a plusieurs (erreur de type b)
- . identification de 2 ou plusieurs TIRs alors qu'il n'existe pas (erreur de type d)
- . identification d' une absence de TIR alors qu'il y en a plusieurs (erreur de type f))

¹⁶ le fait de conduire à une exclusion immédiate du projet dès lors que $\sum_0^n F_t < 0$ étant considéré comme une réussite dans le cadre de la règle de BEZZA.

. identification de plusieurs TIRs quand il y en a bien plusieurs mais en nombre différent (erreur g)

Le tableau ci-dessous présente la nature des erreurs identifiées lors de l'utilisation des différentes règles:

TABLEAU 2 APPRECIATION DES DIVERSES REGLES EN FONCTION DES ERREURS D'IDENTIFICATION OBSERVEES

Nature des résultats	SOPER	NORS TROM	DE FARO	JEAN	KAPLAN	BEZZA	Total
identification du nombre exact de TIRs	18	16	23	15	23	21	116
nombre erroné de TIRs mais identification d'une multiplicité des TIRs (erreur de type g)	2	1		1		1	5
identification de 2 ou plusieurs TIRs alors qu'il n'y en a qu'un seul (erreur de type a)	3	6		7		2	18
identification d'un seul TIR alors qu'il y en a plusieurs (erreur de type b)					1		1
identification de 1 ou plusieurs TIRs alors qu'il n'existe pas (erreur de type d))	1	1	1	1			4
identification d'une absence de TIR alors qu'il y en a plusieurs (erreur de type f)							
total	24	24	24	24	24	24	144

Il convient maintenant de s'interroger sur le *coût de chacune de ces erreurs*, c'est-à-dire l'impact négatif qu'aurait, au stade de la décision d'investissement, la mauvaise identification de la situation : l'ordre de gravité des erreurs nous paraît être le suivant:

- l'erreur de type **b** tout d'abord : dire qu'un projet n'a qu'un seul TIR alors qu'il y en a plusieurs constitue une erreur **d'une très grande gravité**, puisqu'elle conduit à faire confiance au résultat trouvé alors même que le TIR calculé n'a aucune signification ; si nous nous référons à la classification de TEICHROEW, ROBICHEK et MONTALBANO, cette erreur consiste à identifier comme projet Pur un projet qui est en fait Mixte (détection d'un faux Pur): elle conduirait à recommander par exemple la réalisation du projet de LORIE et SAVAGE (le remplacement de la station de pompage de pétrole brut) alors que la réalisation de ce projet induit une perte de valeur pour l'entreprise.

- l'erreur de type **f** ensuite: cette erreur peut également être considérée comme une **erreur critique**: déclarer en effet une absence de TIR alors qu'il y en a plusieurs constitue une erreur grave dans la mesure où, lorsqu'on utilisera l'algorithme du TIR pour estimer la rentabilité du projet, on trouvera bien un TIR puisqu'il existe, mais un TIR qui, du fait de sa multiplicité, n'a aucune signification : l'utilisation du résultat conduira là encore à réaliser le projet sur la base du TIR alors qu'il s'agit d'un projet Mixte. Nous retrouvons là une situation similaire à la précédente.¹⁷

¹⁷ Notons qu'aucune erreur de type f n'a été détectée dans l'analyse des 24 projets précédents

- l'erreur de type **a** et l'erreur de type **d** ensuite :

. dans le premier cas, déclarer qu'un projet a plusieurs TIR alors qu'il n'y en a qu'un conduit à déclarer Mixte un projet qui est Pur (détection d'un faux mixte): cette situation conduira l'utilisateur à substituer au TIR une autre évaluation de la rentabilité du projet concerné (RIC de MAO par exemple) impliquant l'utilisation de 2 taux dans l'évaluation des balances (TIR pour les balances négatives, k le taux d'actualisation pour les balances positives).Notons toutefois que ,dans ce cas précis,le TIR étant unique,on obtiendra un RIC de Mao rigoureusement égal au TIR ;ici l'erreur initiale n'aura pas de conséquence sur la décision prise à l'égard du projet. En conséquence ,cette erreur ne nous parait pas devoir être affectée d'un coefficient très important.

. il en va de même pour l'erreur de type **d** puisque déclarer qu'il y a un ou plusieurs TIRs alors que ce TIR n'existe pas ,n'a pas grande conséquence pratique puisque de toutes façons ,quand on s'efforcera d'évaluer ce TIR on ne le trouvera pas¹⁸; dès lors le risque de mauvaise évaluation de la rentabilité du projet est inexistant. Reste l'incertitude de l'utilisateur quant à la rentabilité du projet concerné face à un critère qui ne peut être matériellement calculé.

- les erreurs de type **g** sont les erreurs les moins dommageables: en effet,déclarer plusieurs TIRs alors qu'il y en a plusieurs, mais en nombre différent,n'a aucune conséquence négative,puisque dans tous les cas on sera conduit à la même identification du projet (projet mixte) et à en tirer les mêmes conséquences (remplacer le TIR comme outil d'évaluation de la rentabilité du projet par,par exemple,le RIC de Mao).

Au total ,les erreurs auxquelles il convient d' être très attentif à titre principal sont les erreurs b et f , et accessoirement a et d ,l'erreur g pouvant être négligée: un moyen commode de tenir compte de cette hiérarchie serait d'attribuer un coût subjectif de 10 points pour chacune des erreurs de type b et f , un coût de 2 points pour une erreur de type a et d et enfin un coût de 1point pour une erreur de type g. L'application de ce barème aux erreurs entraînées par l'application des diverses règles présentées précédemment entraînerait le résultat suivant:

TABLEAU 3 COMPARAISON DES METHODES EN TERMES DE COUTS D'ERREUR

	SOPER	NORSTROM	DE FARO	JEAN	KAPLAN	BEZZA	
coûts d'erreurs	10	15	2	17	10	5	

L'ordre de classement final des procédures d'identification des projets à TIR multiple nous parait désormais être le suivant:

- la règle de DE FARO
- la règle de BEZZA
- la règle de KAPLAN¹⁹
- et la règle de SOPER

¹⁸ à supposer que le logiciel utilisé par l'utilisateur ait été programmé de façon correcte

¹⁹ Notons toutefois que l'attribution de 10 points de pénalité à l'erreur de la méthode de Kaplan au projet 4 apparait ici quelque peu sévère, compte-tenu du fait que l'identification par cette méthode d'un seul Tir au lieu de 3 n'aurait pas eu de conséquences dommageables (dans la mesure où ces 3 taux sont tous positifs et proches les uns des autres (25%,25% et 35%))

Il n'est pas sans intérêt de faire remarquer que les nouveaux instruments de calcul de la rentabilité d'un projet que sont le RIC de Mao²⁰ et le TRIM de Bezza.²¹ étudiés précédemment, s'appuient respectivement sur les règles de Soper et de Bezza, toutes deux appartenant au club des 'meilleures' méthodes d'identification de la multiplicité éventuelle du TIR d'un projet.²²

Le lecteur qui désirerait, malgré les inconvénients du TIR, évaluer la rentabilité de ses projets d'investissement par l'intermédiaire du TIR, aurait intérêt à évaluer les risques que ces projets puissent conduire à des situations de taux internes de rendement multiples: un moyen pour le faire est l'usage du logiciel NBTIR développé au sein du Céréfia de l'Université de RENNES²³

²⁰ abréviation de l'expression 'Rate of return on Invested capital' (R.I.C.) proposée par J.C.T. MAO

²¹ abréviation de l'expression 'Taux de Rendement Interne Modifié' proposée par E.M.BEZZA

²² C.De Faro pour sa part ne proposant pas d'instrument nouveau susceptible de fournir un taux de rentabilité fiable d'un projet d'investissement mixte, et renvoyant en cas d'identification d'un tel projet soit à l'abandon d'une évaluation-taux de la rentabilité du projet en faveur de la Van (procédure de Oakford), soit à l'adoption du calcul du RIC (procédure de Mao)

²³ pour une présentation de ce logiciel NBTIR, consulter le site Internet du Céréfia (Université de Rennes 1/Faculté des Sciences Economiques/Céréfia/Logiciels/Nbtir)

Bibliographie

E.M.Bezza *Le problème de la multiplicité des taux internes de rendement :examen critique*, Mémoire de DEA Finance,Rennes ,Décembre 1981

E.M.Bezza Le concept d'intérêts cumulés: un nouvel algorithme pour dépasser le problème de la multiplicité des TIRs , *Economies et Sociétés* (série Sciences de Gestion),n° 11-12 ,1981,pp.99-132

C. De Faro On the internal rate of return , *The Engineering Economist*, Spring 1974, pp.165-194

C.De Faro On the internal rate of return :reply, *The Engineering Economist*, Winter 1976 pp.145-146

C.De Faro A sufficient condition for a unique non negative internal rate of return: a comment ,*Journal of Financial and Quantitative Analysis*, September 1973, pp.683-684

C.De Faro A sufficient condition for unique non negative internal rate of return :further comments, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, September 1978, pp.557-584

C.De Faro et L.Soares A Flexible sufficient condition for a unique non negative internal of return , *The Engineering Economist*, Winter 1978, pp.117-127

W.H.Jean On Multiple rates of return, *Journal of Finance*, March 1968, pp.187-192

W.H.Jean On Multiple rates of return : reply, *Journal of Finance*,March 1969 ,pp.99-100

S.Kaplan A note on a method for precisely determining the uniqueness or non uniqueness of the internal rate of return for a proposal investment ,*Journal of Industrial Engineering*, Jan-Feb. 1965, pp.70-71

J.H.Lorie,L.S.Savage Three Problems in Capital Rationing ,*Journal of Business*, October 1955 ,pp.229-239

C.Norstrom A Note on Mathematical Analysis of rates of return under certainty, *Management Science*, Jan. 1967 pp.429 et suivantes.

C.Norstrom A Sufficient condition for a Unique non negative internal rate of return , *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, June 1972, pp.1835-1838

C.S.Soper The Marginal Efficiency of Capital: a Further Note,*Economic Journal*,March 1959,pp.174-177

D.Teichroew, A.A.Robichek et M.Montalbano An Analysis of criteria for Investment and Financing Decisions under Certainty, *Management Science*, January 1965, pp.395-403