Comptalia.com

1er centre de formation comptable via Internet.

Les corrigés des examens DPECF - DECF 2004

48h après l’examen sur
www.comptalia.com

L’école en ligne qui en fait + pour votre réussite

Préparation aux DPECF et DECF via Internet

SESSION 2004

MÉTHODES QUANTITATIVES

SUJET DE MATHEMATIQUES

Durée : 2 heures — Coefficient : 0,5

Documents autorisés :

Une calculatrice de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante, et sans aucun moyen de transmission, à l'exclusion de tout autre élément matériel ou documentaire (circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 ; BOEN n° 42).

Document remis au candidat :

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3.

II vous est demandé de vérifier que le sujet est complet dès sa mise à votre disposition.

Barème indicatif :

Partie A : 7 points
Partie B : 7 points
Partie C : 6 points

Les trois parties portent sur le même thème mais elles peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie A

Madame et Monsieur DULIN désirant ouvrir un restaurant traditionnel à proximité du nouveau centre d'affaires ont déposé chaque mois 1 000 € pendant 48 mois sur un compte rémunéré à 4,91 %.

1. Quel est le taux mensuel équivalent au taux annuel de 4,91 % ? On donnera la réponse à 10^{-4} près.

2. De quel capital disposent-ils juste après le dernier versement ? Et cinq mois plus tard ?

3. Ils complètent cette somme par un emprunt de 150 000 € au taux annuel de 6,18 % remboursable par mensualités constantes à partir du mois suivant l'obtention du prêt. Ne désirant pas avoir des mensualités supérieures à 1 700 €, quel est le nombre minimal d'années de cet emprunt ?

Partie B

Une enquête d'un service commercial a permis de connaître l'évolution de la demande de déjeuners en fonction du prix proposé.

N° de la donnée	Prix proposé p_i en euros	Nombre de demandes hebdomadaires d_i
1	14	520
2	18	433
3	22	325
4	26	169
5	30	110
6	34	45

1. Représenter graphiquement cette distribution dans un repère orthogonal. On placera les prix en abscisse et les demandes en ordonnée.
Peut-on envisager un ajustement linéaire ?

2. a) Déterminer le point moyen du nuage.

b) Déterminer l'équation de la droite de régression $D_{d/P}$ de la forme $d = ap + b$ où les coefficients a et b seront déterminés à l'aide d'une calculatrice.

c) Tracer la droite $D_{d/P}$

3. En utilisant la question précédente déterminer la recette hebdomadaire, en fonction du prix proposé p.

4. Déterminer le prix du repas (arrondi au demi euro près) qui donne la recette maximale.

Partie C

Le gérant fixe finalement le prix du repas à 17 €.

1. Quelle est la recette hebdomadaire *R(n)*, exprimée en centaines d'euros, en fonction du nombre *n* de clients par semaine ?

2. Il prévoit d'autre part que son coût de production hebdomadaire, exprimé en centaines d'euros, en fonction du nombre n de clients, est donné par la relation :

$$C(n) = 8 + 1{,}4 \ln(n + 1)$$

Etudier la fonction C définie par : $C(x) = 8 + 1{,}4 \ln(x + 1)$ **sur** $[0 ; 150]$.

3. a) Représenter graphiquement la fonction C dans un repère orthogonal sur la feuille de papier millimétré fournie.
(Unités graphiques : 1 cm pour 10 unités sur l'axe des abscisses et 1cm pour 100 € sur celui des ordonnées)

b) Tracer dans le même repère la représentation de la fonction recette.

4. Déterminer, à l'aide du graphique, le nombre de repas hebdomadaires à partir duquel le gérant réalise un bénéfice.

PROPOSITION DE CORRIGE

Partie A

1. Taux mensuel équivalent

- Rappel du principe de calcul d'un taux équivalent :

i = Taux d'actualisation annuel, donné par l'énoncé

i' = Taux équivalent recherché

=> On pose l'équation : $(1 + i') = (1 + i)^k$

Avec k = Le rapport entre la période donnée et la période équivalente recherchée.

- Application à la question

Taux annuel = 4,91%

Période = Le mois

=> Pour trouver le taux mensuel équivalent à un taux annuel de 4,91%, on pose :

$(1+i') = (1{,}0491)^{(1/12)}$ => 12 car 12 mois dans l'année !

Il vient :

=> $(1+i') = 1{,}004002$

=> $i' = 1{,}004002 - 1$

=> $i' = 0{,}004002$

=> i' = 0,4002%

2. De quel capital disposent-ils juste après le dernier versement ? Et cinq mois plus tard ?

- **Capital après le dernier versement**

Principe : Il suffit d'appliquer la formule permettant de trouver la valeur acquise par une suite de mensualités constantes.

Rappel : Valeur acquise = $a \left[\dfrac{(1 + i)^n - 1}{i} \right]$

Avec :

a = Mensualités = 1 000 €

i = Taux mensuel équivalent = 0,4002%

n = Nombre de mensualités constantes versées = 48

$$\Rightarrow \text{Valeur acquise} = 1\,000 \left[\frac{(1{,}004002)^{48} - 1}{0{,}004002} \right] = 1\,000 * \frac{0{,}211322}{0{,}004002} = 1\,000 * 52{,}80419 = 52\,804{,}19$$

Conséquence : **Capital après le dernier versement ≈ 52 804 €**

- **Capital cinq mois plus tard**

Principe : Il suffit d'appliquer la formule permettant de trouver la valeur acquise par une suite de mensualités constantes "d" période après le dernier versement (sans aucun versement après le $n^{ième}$).

Rappel : Valeur acquise = $a \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] * (1+i)^d$

Avec :

a = Mensualités = 1 000 €

i = Taux mensuel équivalent = 0,4002%

n = Nombre de mensualités constantes versées = 48

d = Nombre de périodes (ici le mois) après le dernier versement = 5

Remarque : Nous disposons déjà de la réponse à la $1^{ère}$ partie de l'équation (cf question 1) => 52 804 €

Il vient :

Valeur acquise = $52\,804 * (1{,}004002)^5 = 52\,804 * 1{,}02017$

Conséquence : Capital 5 mois après le dernier versement ≈ 53 869 €

3. Nombre minimal d'années de l'emprunt

Principe : Il suffit d'appliquer la formule permettant de trouver la valeur actuelle d'une suite de mensualités constantes.

Rappel : Valeur actuelle = $a \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$

Avec :

Valeur actuelle = 150 000 €

a = Mensualités constantes = 1 700 €

i = Taux mensuel équivalent = 0,50096%
=> $(1+i') = (1{,}0618)^{(1/12)}$
=> $(1+i') = 1{,}0050096$
=> $i' = 1{,}0050096 - 1$
=> $i' = 0{,}0050096$
=> $i' = 0{,}50096\%$

n = Nombre de mensualités constantes versées => Ce que l'on cherche

Il vient :

$$150\,000 = 1\,700 \left[\frac{1 - (1{,}0050096)^{-n}}{0{,}0050096} \right]$$

Il faut donc résoudre cette équation => On peut écrire :

$$\frac{150\ 000}{1\ 700} = \left[\frac{1 - (1{,}0050096)^{-n}}{0{,}0050096}\right]$$

$$=> 88{,}2353 = \left[\frac{1 - (1{,}0050096)^{-n}}{0{,}0050096}\right]$$

$$=> 88{,}2353 * 0{,}0050096 = 1 - (1{,}0050096)^{-n}$$

$$=> (88{,}2353 * 0{,}0050096) - 1 = - (1{,}0050096)^{-n}$$

$$=> - 0{,}56 = - (1{,}0050096)^{-n}$$

$$=> 0{,}56 = (1{,}0050096)^{-n}$$

On peut maintenant utiliser les spécificités des log népériens par exemple :

$$=> \ln 0{,}56 = \ln (1{,}0050096)^{-n}$$

$$=> \ln 0{,}56 = - n \ln (1{,}0050096)$$

$$=> - 0{,}58 = - n * 0{,}00499709$$

$$=> - n = \frac{- 0{,}58}{0{,}00499709}$$

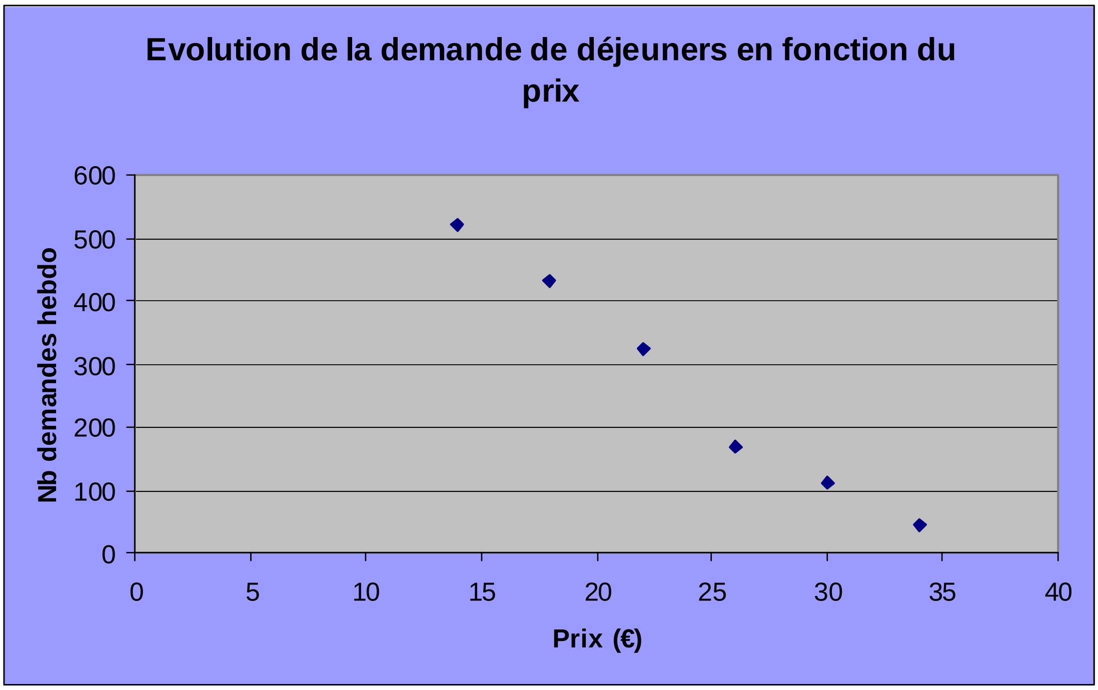
$$=> - n = - 116{,}07$$

$$=> n = 116{,}07 \text{ mois}$$

Conclusion : Le nombre minimal d'années est d'environ 10 ans => 116,07/12 = 9,67 ans

Partie B

1. Représenter graphiquement la distribution



2. a) Déterminer le point moyen du nuage

Rappel : Formules à connaître pour établir l'équation de la droite de régression : y = ax + b

$$a = \frac{Cov\ (xy)}{V(x)} \qquad \text{et} \qquad b = \bar{y} - a\,\bar{x}$$

Sachant que :

N = Nombre d'observations (nombre de mois, semestres, trimestres, années…)

$$\text{Moyenne de } x = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=n} x_i$$

$$\text{Moyenne de } y = \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=n} y_i$$

Variance = Moyenne des carrés – Carré de la moyenne

$$\Rightarrow V(x) = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2\right] - (\bar{x})^2$$

Remarque : Compte tenu de sa définition, une variance ne peut pas être négative !

Covariance = Moyenne des produits – Produit des moyennes

$$\Rightarrow Cov\ (xy) = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i\right] - (\bar{x}\,\bar{y})$$

Remarque : Compte tenu de sa définition, une covariance peut être négative !

Conséquence : il suffit de remplacer dans les définitions ci-dessus "x" par "p" et "y" par "d"

On peut donc construire le tableau de calcul suivant :

N° de la donnée	Prix proposé p_i en euros	Nombre de demandes hebdomadaires d_i	$(p_i)^2$	$p_i * d_i$
1	14	520	196	7 280
2	18	433	324	7 794
3	22	325	484	7 150
4	26	169	676	4 394
5	30	110	900	3 300
6	34	45	1156	1 530
	$\sum$ = **144**	$\sum$ = **1 602**	$\sum$ = **3 736**	$\sum$ = **31 448**

- **Point moyen du nuage**

Moyenne de p_i = $\overline{p_i} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=n} p_i$

Moyenne de d_i = $\overline{d_i} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=n} d_i$

=> $\overline{p_i}$ = 1/6 * 144 = **24**

=> $\overline{d_i}$ = 1/6 * 1 602 = **267**

2.b) Equation de la droite de régression : d = ap + b

=> $Cov(p_i\, d_i)$ = (1/6 * 31 448) – (24 * 267) => $Cov(p_i\, d_i)$ = - 1 166,67

=> $V(p_i)$ = (1/6 * 3 736) - 24^2 => => $V(p_i)$ = 46,67

=> a = - 1 166,67/46,67

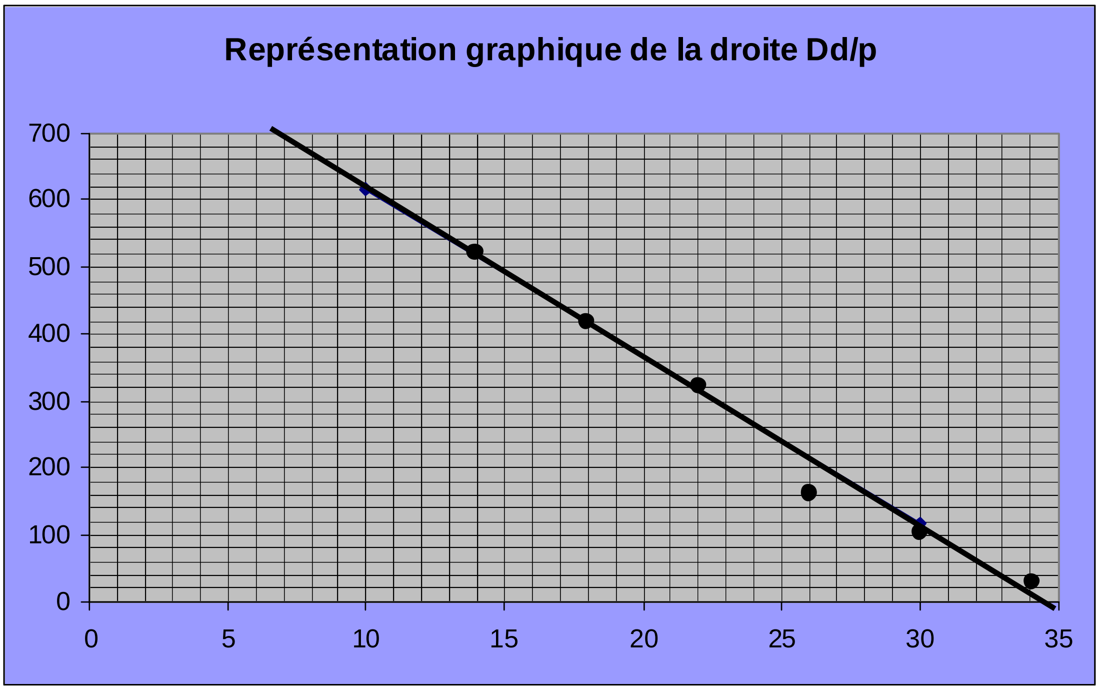
=> a = - 25

=> b = 267 – (- 25 * 24)

=> b = 867

Conclusion : **d = - 25p + 867**

2c) <u>Tracer la droite</u>



$D_{d/p}$ = - 25 p + 867

3. <u>Recette hebdomadaire en fonction du prix p proposé</u>

<u>Principe</u> : Recette hebdomadaire = Demande * Prix

$R(p) = p\,(-25p + 867) = -25p^2 + 867p$

4. <u>Prix du repas donnant la recette maximale</u>

<u>Principe</u> : L'optimum est atteint lorsque la dérivée s'annule

$R'(p) = -50p + 867$

On pose donc : $R'(p) = 0$

=> $-50p + 867 = 0$

=> $P = 867/50 \approx 17{,}50$ €

Partie C

1. La recette hebdomadaire peut s'exprimer en fonction du nombre de clients si l'on fixe le prix à 17 € ou 0,17 centaines d'euros.

=> R(n) = 0,17 . n

2. Etude de la fonction : C(x) = 8 + 1,4 ln (n+1)

Soit le coût de production = C(n) = 8 + 1,4 ln (n+1)

Etudions la fonction : C(x) = 8 + 1,4 ln (x+1)

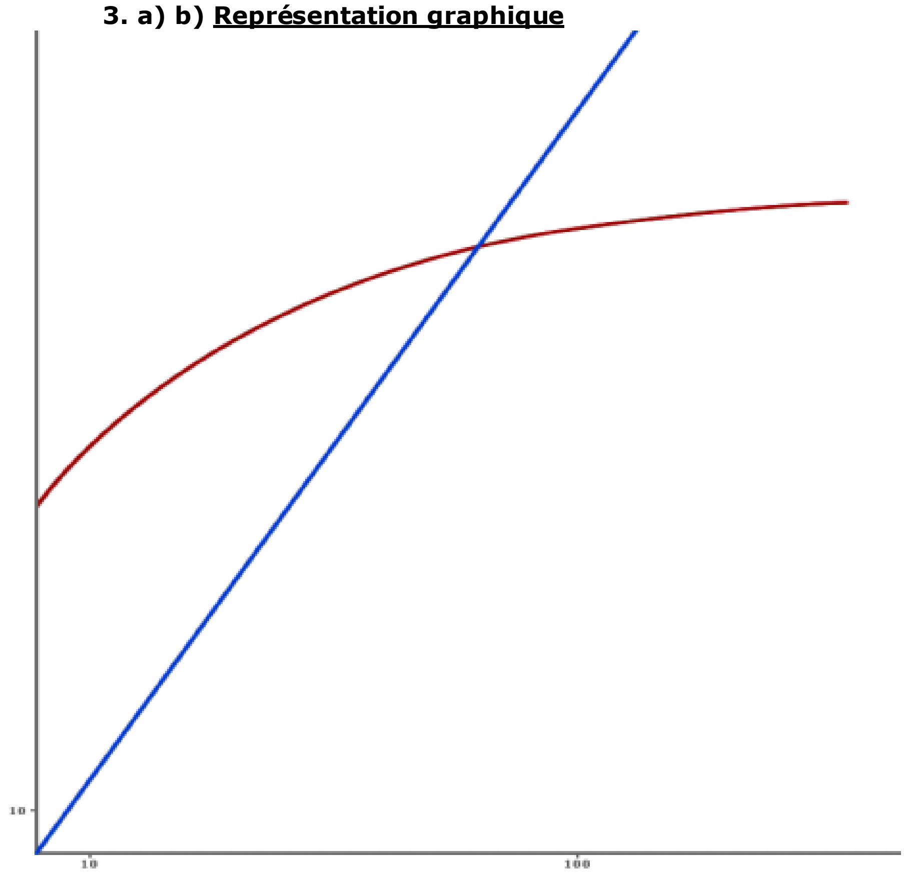
Sa dérivée est : $C'x = \frac{1,4}{x + 1} > 0$ sur [0 ; 150]

=> Donc la fonction C est croissante sur cet intervalle

x	0	150
C'(x)	1,4	0,009
C(x)	8	↗ 15,02

On remarque que son taux de croissance diminue

3. a) b) Représentation graphique



4. Le point d'intersection des deux courbes se situe pour un nombre de client **n ≈ 84**