Sujet :

METHODES QUANTITATIVES

SUJET DE MATHEMATIQUES

Durée : 2 heures – Coefficient : 0,5

PROBLEME 1

Le 1/1/n une entreprise a emprunté 1 000 000 € au taux annuel de 5 %. Elle veut rembourser en 5 ans. Trois formules sont possibles : l'entreprise choisira celle qui minimise le total des intérêts.

1) Première formule : le remboursement s'effectue au moyen de 5 annuités constantes, la première survenant le 1/1/(n+1).
Quel est le montant de ces annuités ? Quel est le total des intérêts payés ?

2) Deuxième formule : le remboursement a lieu suivant la règle des emprunts indivis avec des amortissements constants de 200 000 €. Il y a 5 annuités, la première survenant le 1/1/(n+1).
Compléter le tableau d'amortissement figurant en annexe.

3) Troisième formule : l'entreprise rembourse 300 000 € le 1/1/(n+2)
400 000 € le 1/1/(n+3)
le solde M est versé le 1/1/(n+5).
Ecrire l'équation qui assure l'équivalence entre la somme empruntée et les sommes remboursées en actualisant au 1/1/n.
En déduire la valeur de M ; préciser le total des intérêts payés

4) Conclure sur la décision de l'entreprise

PROBLEME 2

I) Une entreprise produit trois types d'objets a, b et c. La fabrication de ces objets impose leur passage dans trois ateliers successifs notés A1, A2, A3.
Le tableau ci-dessous, dit tableau de production, indique le nombre d'heures nécessaires pour la fabrication de chaque objet, ainsi que le volume hebdomadaire disponible dans chaque atelier.

Ateliers / **Objets**	**A1**	**A2**	**A3**
a	1	5	2
b	1	3	7
c	2	4	1
Total horaire hebdomadaire disponible	160	500	350

(La fabrication de l'objet b nécessite un passage d'une heure en A1, de trois heures en A2, de sept heures en A3, etc…).

Les questions 1, 2, 3 étudient trois situations différentes au cours d'une semaine.

1) On produit 50 objets a et 50 objets c. Combien peut-on alors produire d'objets b et quelles sont dans ce cas les ressources horaires encore disponibles dans chaque atelier ?

2) Peut-on produire 85 objets a et 25 objets b ? Pourquoi ne peut-on alors produire d'objets c ?

3) On note x le nombre d'objets a, y le nombre d'objets b, z le nombre d'objets c que l'entreprise produit au cours d'une semaine donnée.
Il est souhaitable que les ateliers A1, A2, A3 utilisent leurs stocks horaires hebdomadaires en totalité. Déterminer la production qui satisfait cette condition en résolvant le système suivant :
$x + y + 2z = 160$
$5x + 3y + 4z = 500$
$2x + 7y + z = 350$
4) Les objets a, b, c sont vendus avec une marge de respectivement 600, 400, 200 euros.
Déterminer les marges hebdomadaires associées aux 3 productions étudiées (voir questions 1,2 et 3).

II) A la suite d'une restructuration l'entreprise ne fabrique plus que les objets a et b avec deux ateliers A et B. Le tableau de production est alors suivant :

Ateliers / **Objets**	**A**	**B**
a	4	6
b	4	3
Total horaire disponible	400	525

(la fabrication de l'objet a requiert un passage de 4 heures dans l'atelier A, de 6 heures dans l'atelier B, etc…)

1) Ecrire sous forme d'inéquations le système des contraintes concernant la fabrication de x objets a et de y objets b au cours d'une semaine donnée.

2) Représenter graphiquement les droites (D) et (D') d'équations respectives

$x + y = 100$ et $2x + y = 175$
(utiliser le repère de la feuille annexe), préciser les coordonnées de leur point d'intersection I.
Indiquer, au moyen de hachures la partie du plan représentant les solutions graphiques du système figurant à la question II)1).

3) Les objets a et b sont vendus avec une marge de respectivement 600 et 400 euros. On note W la marge procurée par la vente de x objets a et de y objets b au cours d'une semaine donnée.
Exprimer W en fonction de x et y.
Tracer la droite (Δ) correspondant au cas particulier W = 50 000 dans le repère ci-dessus.
Quelle est la production qui maximise W ? Justifier votre réponse. Quelle est la marge maximale ?

Corrigé :

PROBLEME 1

1) $A = Cn * \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 1\,000\,000 * \dfrac{0{,}05}{1-(1{,}05)^{-5}} \approx 230\,974{,}8$

2)

	Capital restant dû en début de période	Intérêt	Amortissement	Annuités
1/1 (n+1)	1 000 000	50 000	200 000	250 000
1/1 (n+2)	819 025	40 951,26	190 023	230 974,8
1/1 (n+3)	629 001	31 450,08	199 524	230 974,8
1/1 (n+4)	429 476	21 473,8	209 500	230 974,8
1/1 (n+5)	219 976	10 998,8	219 976	230 974,8
	TOTAL	154 874		1 154 874

La somme des interêts ≈ 154 874 €

3) $1\,000\,000 = \dfrac{300\,000}{(1{,}05)^2} + \dfrac{400\,000}{(1{,}05)^3} + \dfrac{M}{(1{,}05)^5}$

$M \approx 487\,994$

n+2	1 000 000	102 500	197 500	300 000
n+3	802 500	40 125	359 875	400 000
n+5	442 625	45 369	44 2625	487 994

Somme des intérêts = 187 994 €

4) L'entreprise doit choisir les emprunts indivis

PROBLEME 2

I)
1) On produit 50 objets a et 50 objets c

Horaires disponibles :

A1 : 160 – 50 – 100 = 10
A2 : 500 – 450 – 200 = 50
A3 : 350 – 100 – 50 = 200

Nombre d'objets b que l'on peut produire :

Avec $\left\{\dfrac{10}{1};\dfrac{50}{3};\dfrac{200}{7}\right\}$ on peut produire 10 objets b.

2) Si l'on produit 85 objets a et 25 objets b

➔ Horaires disponibles

A1 : 160 – 85 – 25 = 55
A2 : 500 – 425 – 75 = 0
A3 : 350 – 170 – 175 = 5

Il n'a pas plus d'horaires disponibles en A2 donc on ne peut produire c.

3) Le système équivaut à résoudre A X = B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 160 \\ 500 \\ 350 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} B$$

$$X = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

4) M1 = 50 600 + 50 200 = 40 000
M2 = 85 600 + 25 400 = 61 000
M3 = 50 400 + 40 400 + 30 200 = 52 000

II)

1) $\begin{cases} 4x + 4y \leq 400 \\ 6x + 3y \leq 525 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 700 \\ 2x + y \leq 175 \end{cases}$

2) Cf Graph

3) W = 600x + 400y
si W = 50 000

Δ a pour équation 3x + 2y = 250

On remarque que cette droite tangente détermine la zone de production possible au point d'intersection des deux droites.

La production qui maximise le W est le point d'intersection x = 75
Y = 25

La production à ce point donne aussi la marge maximale car toute augmentation de W éloignerait Δ de la zone des productions et il n'y aurait plus d'intersection

Problème n°1

Cas n°1

Année	CRD	Intérêts	Amt	Annuité
1	1000000	50000	180974,8	230974,8
2	819025,2	40951,26	190023,54	230974,8
3	629001,66	31450,08	199524,71	230974,8
4	429476,95	21473,85	209500,95	230974,8
5	219976	10998,8	219976	230974,8
TOTAL		**154873,99**		**1154873,99**

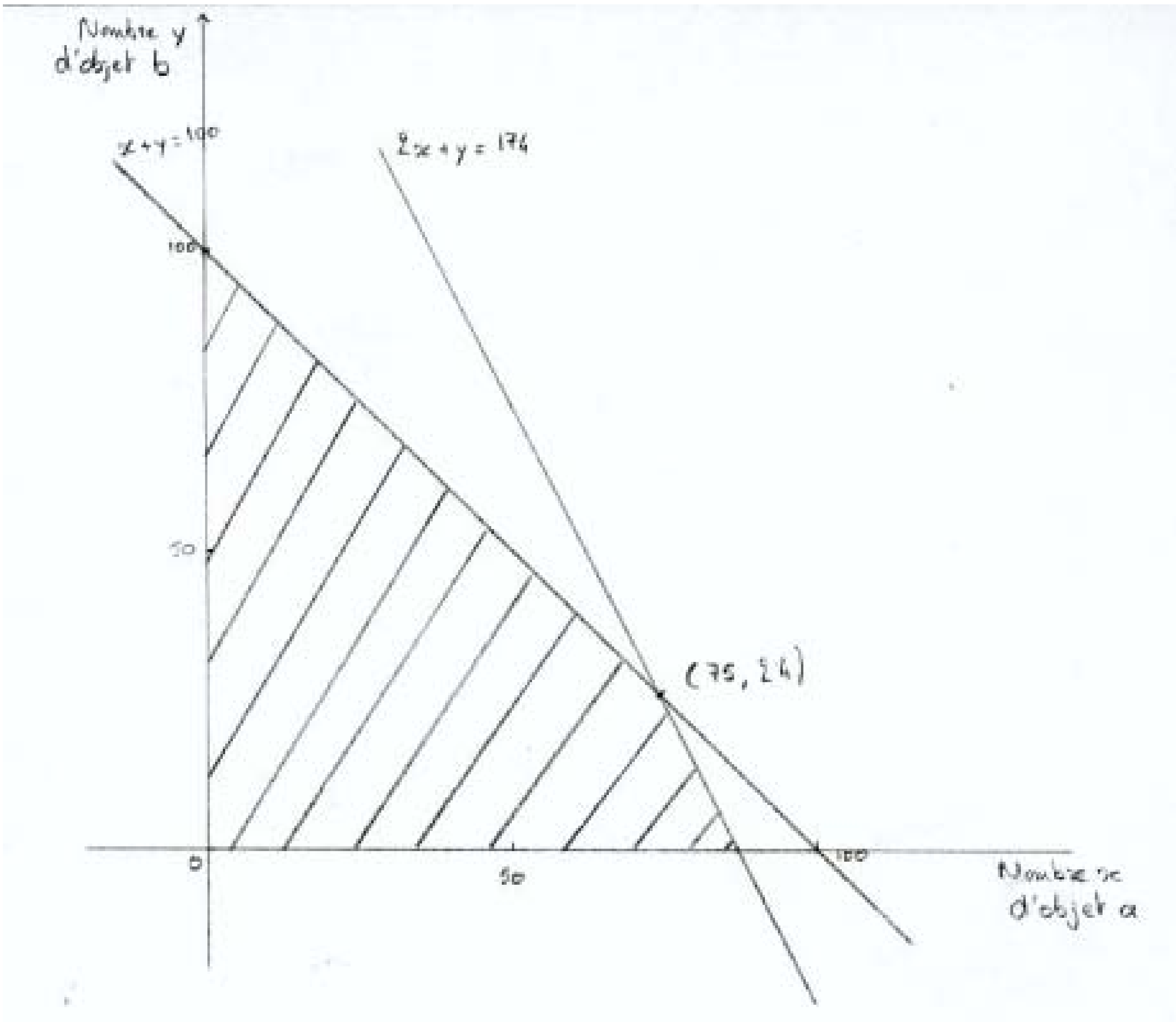
Cas n°2

Année	CRD	Intérêts	Amt	Annuité
1	1000000	50000	200000	250000
2	800000	40000	200000	240000
3	600000	30000	200000	230000
4	400000	20000	200000	220000
5	200000	10000	200000	210000
TOTAL		**150000**		**1150000**

Cas n°3

Année	CRD	Intérêts	Amt	Annuité
1	1000000	50000	-50000	0
2	1050000	52500	247500	300000
3	802500	40125	359875	400000
4	442625	22131,25	-22131,25	0
5	464756,25	23237,81	464756,25	487994,06
TOTAL		**187994,06**		**1187994,06**

Problème 2


Nombre y d'objet b
x + y = 100
2x + y = 174
100
50
(75, 24)
0
50
100
Nombre x d'objet a

