



1^{er} centre de formation
comptable via Internet.



Les corrigés des examens DPECF - DECF 2003

48h après l'examen sur
www.comptalia.com

L'école en ligne qui en fait **+** pour votre réussite

Préparation aux DPECF et DECF via Internet

SESSION 2003

MÉTHODES QUANTITATIVES

SUJET DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures

Coefficient : 0,5

Documents autorisés :

Une calculatrice de poche à fonctionnement autonome, sans aucun moyen de transmission, à l'exclusion de tout autre élément matériel ou documentaire (circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 BOEN n° 42).

Document remis au candidat :

Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6 dont deux annexes.

Il vous est demandé de vérifier que le sujet est complet dès sa mise à votre disposition.

L'annexe 2 est à **rendre** en un exemplaire avec la copie en fin d'épreuve. L'exemplaire fourni étant suffisant pour permettre la préparation et la présentation des réponses, il ne sera pas distribué d'exemplaires supplémentaires.

Barème indicatif :

| | |
|-------------|------------|
| Exercice I | |
| Partie A | 6,5 points |
| Partie B | 5,5 points |
| Exercice II | 8 points |

SUJET

Exercice I

Le but de l'exercice est de déterminer le prix d'équilibre d'un produit (prix auquel l'offre est égale à la demande).

Partie A : Etude statistique

Dans cette partie, on utilisera les fonctions statistiques de la calculatrice. Le détail des calculs n'est pas exigé. Le tableau suivant donne les résultats d'une étude réalisée sur un produit P.
x représente le prix de vente unitaire du produit P exprimé en euros.
y la quantité demandée et z la quantité offerte, sur le marché, du produit P sont exprimées en milliers d'articles.

| | | | | | | |
|--|------|------|------|------|------|------|
| Prix de vente unitaires x_i en euros | 0,30 | 0,35 | 0,45 | 0,65 | 0,80 | 1 |
| Demande y_i en milliers | 6,25 | 4,90 | 3,75 | 2,75 | 2,40 | 2,25 |
| Offre z_i en milliers | 1,25 | 1,30 | 1,30 | 1,50 | 1,55 | 1,60 |

Travail à faire

1 - Le plan est rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm pour 0,1 euros sur l'axe des abscisses et 2 cm pour 1 millier sur l'axe des ordonnées.

Représenter sur le même graphique, en utilisant deux couleurs différentes, les nuages de points associés respectivement aux séries statistiques $(x_i ; y_i)$ et $(x_i ; z_i)$.

2 - Etude de la demande

La forme du nuage $(x_i ; y_i)$ suggère d'envisager un ajustement exponentiel de y en x.

On effectue le changement de variable $Y_i = \ln y_i$ où \ln représente la fonction logarithme népérien.

a - Donner dans un tableau les valeurs Y_i , arrondies à 10^{-4} près.

b - Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i ; Y_i)$ et, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de Y en x sous la forme : $Y = ax + b$ (a et b seront arrondis au centième le plus proche).

c - En déduire une estimation de la demande y en fonction du prix x.

d - En supposant que l'expression obtenue en c reste valable, déterminer le nombre d'unités de produit P que les consommateurs sont prêts à acheter si le prix de vente unitaire est fixe à 1,5 euros.

3 - Etude de l'offre

La forme du nuage $(x_i ; z_i)$ suggère d'envisager un ajustement affine de z en x.

a - Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i ; z_i)$. Un ajustement affine par la méthode des moindres carrés de z en x est-il satisfaisant ? Pourquoi ?

b - Donner une équation de la droite de régression de z en x sous la forme : $z = mx + p$ avec m et p arrondis au centième le plus proche.

Partie B : Etude de fonctions

On considère dans cette partie que la demande et l'offre sont représentées par les fonctions f et g définies respectivement sur l'intervalle $[0 ; 1,5]$ par :

$$f(x) = e^{-1,41x + 2,08} \text{ et } g(x) = 0,53x + 1,1$$

Travail à faire

1 - Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1,5]$.

2 - Compléter le tableau de valeurs donné en *annexe 1* dans lequel les valeurs de $f(x)$ seront arrondies à 10^{-2} près et, construire sur le graphique de la partie A la courbe représentative de f.

3 - Construire sur le graphique précédent la courbe représentative de g.

4 - Déterminer graphiquement le prix d'équilibre du produit (à 10^{-1} près). En déduire le revenu total des producteurs pour le prix d'équilibre (arrondi à la centaine d'euros près).

ANNEXE 1

Tableau de valeurs de la fonction f

(Les valeurs de la fonction f sont arrondies à 10^{-2} près).

| | | | | | | | | | |
|--------------|---|------|-----|------|-----|------|-----|------|------|
| x | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 | 1,2 | 1,4 | 1,5 |
| f (x) | | 6,04 | | 3,43 | | 1,95 | | 1,11 | 0,97 |

Exercice II

La société DPE émet un emprunt obligataire dont les caractéristiques sont les suivantes :

- nombre d'obligations émises : 8 000
- nominal de l'obligation : 1 000 euros
- taux annuel d'intérêt : 5,8 %
- valeur d'émission du titre : 990 euros
- valeur de remboursement : au pair

Le service de l'emprunt (intérêt et amortissement) est assuré par 8 échéances annuelles de montant sensiblement constant.

Les frais d'émission supportés par l'émetteur s'élèvent à 0,5 % du nominal.

Travail à faire

1. Calculer l'annuité de remboursement.
2. Présenter les deux premières lignes du tableau d'amortissement de cet emprunt ainsi que la dernière ligne (remplir le tableau fourni en *annexe 2*, arrondir le nombre d'obligations amorties chaque année à l'entier le plus proche).
3. Au bout de combien de temps aura-t-on amorti environ les deux tiers des obligations émises ?
4. Calculer, à la date d'émission, le taux de rendement moyen.
Vérifier que le taux de revient de l'emprunt est égal à 6,1818 %.

ANNEXE 2 (a rendre avec la copie)

| Année | Dettes en valeur nominale au début de l'année | Intérêt de l'année | Nombre d'obligations à amortir en fin d'année | Amortissement | Annuité |
|-------|---|--------------------|---|---------------|---------|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 8 | | | | | |

Correction exercice 1

Partie A - Etude statistique

Question 1 : Représenter sur le même graphique, en utilisant deux couleurs différentes, les nuages de points associés respectivement aux séries statistiques $(x_i ; y_i)$ et $(x_i ; z_i)$.

Cf graphique page 9

Question 2 – Etude de la demande

a) Donner dans un tableau les valeurs Y_i , arrondies à 10^{-4} près

| y_i Demande | Y_i ou $\ln(y_i)$ |
|------------------|------------------------|
| 6,25 | 1,8326 |
| 4,90 | 1,5892 |
| 3,75 | 1,3218 |
| 2,75 | 1,0116 |
| 2,40 | 0,8755 |
| 2,25 | 0,8109 |
| - | Total = 7,4416 |

b - Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i ; Y_i) et, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de Y en x sous la forme : Y = ax + b (a et b seront arrondis au centième le plus proche).

- Coefficient de corrélation linéaire

- Rappel de la formule du coefficient de corrélation linéaire

$$r = \frac{\text{Cov}(xY)}{\sigma(x) * \sigma(Y)}$$

- Tableau préparatif des calculs

| x _i PVu | Y _i Demande | Y _i ou ln(y _i) | x _i ² | x _i ln(y _i) ou x _i Y _i | Y _i ² ou ln(y _i) ² |
|-----------------------|---------------------------|--|-----------------------------|--|--|
| 0,30 | 6,25 | 1,8326 | 0,09 | 0,5498 | 3,3584 |
| 0,35 | 4,90 | 1,5892 | 0,1225 | 0,5562 | 2,5256 |
| 0,45 | 3,75 | 1,3218 | 0,2025 | 0,5948 | 1,7472 |
| 0,65 | 2,75 | 1,0116 | 0,4225 | 0,6575 | 1,0233 |
| 0,80 | 2,40 | 0,8755 | 0,64 | 0,7004 | 0,7665 |
| 1 | 2,25 | 0,8109 | 1 | 0,8109 | 0,6576 |
| Total = 3,55 | Total = 22,30 | Total = 7,4416 | Total = 2,4775 | Total = 3,8696 | Total = 10,0786 |

N = Total des observations = 6

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i = 1/6 * 3,55 = 0,5917$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n Y_i = 1/6 * 7,4416 = 1,2403$$

$$V(x) = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right] - (\bar{x})^2 = [1/6 * 2,4775] - (0,5917)^2 = 0,0628$$

$$V(Y) = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n Y_i^2 \right] - (\bar{Y})^2 = [1/6 * 10,0786] - (1,2403)^2 = 0,1414$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0,0628} = 0,2506$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{0,1414} = 0,376$$

$$\text{Cov}(xY) = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i Y_i \right] - (\bar{x} \bar{Y}) = [1/6 * 3,8696] - (0,5917 * 1,2403) = - 0,08895$$

Donc on peut maintenant calculer "r" => $r = \frac{\text{Cov}(xY)}{\sigma(x) * \sigma(Y)} = \frac{- 0,08895}{0,2506 * 0,376} = - 0,94$

- Equation de la droite de régression de Y en x sous la forme : $Y = ax + b$

Principe : Il s'agit donc d'ajuster la série avec une fonction exponentielle, de la forme : $y = B * A^x$
Avec B et A étant des constantes

Procédure : Nous allons tout d'abord mettre cette fonction sous sa forme logarithmique. Ceci permettra, dans un 1^{er} temps, de la "transformer" en une droite d'équation $y = ax + b$

Il vient : $\log y = \log (B * A^x)$

Ensuite, on utilise les particularités des logarithmes

Rappels :

$\log (ab) = \log a + \log b \Rightarrow$ On peut donc écrire : $\log y = \log B + \log A^x$

$\log a^n = n \log a \Rightarrow$ On peut donc écrire : **$\log y = \log B + x \log A$**

On pose :

$$\log y = Y$$

$$\log B = b$$

$$\log A = a$$

Ceci permet d'écrire : $Y = ax + b$

Il vient donc :

$$a = \frac{\text{Cov}(xY)}{V(x)} = -0,08895 / 0,0628 = -1,4164 \Rightarrow \text{arrondi à } -1,42$$

$$b = \bar{Y} - a\bar{x} = 1,2403 - (-1,4164 * 0,5917) = 2,0784 \Rightarrow \text{Arrondi à } 2,08$$

Conséquence, il vient : **$Y = -1,42x + 2,08$**

c - En déduire une estimation de la demande y en fonction du prix x

Il faut maintenant revenir à la fonction d'origine (on revient en arrière !)

$$\Rightarrow Y = -1,42x + 2,08 \Rightarrow \ln(y) = -1,42x + 2,08$$

Sachant que : **$\log_{(a)} x = y \Rightarrow x = a^y$**

\Rightarrow Lire : log base "a" de x = y, implique que "x" = "a" à la puissance "y"

Rappelez-vous qu'un log népérien (ln) à une base "e" \Rightarrow Il vient : $y = e^{(-1,42x + 2,08)}$

Sachant que : $e^{(ax + b)} = e^{ax} * e^b \Rightarrow$ Il vient : $y = e^{(-1,42x)} * e^{(2,08)}$

Sachant que : $e^{(ax)} = (e^a)^x \Rightarrow$ Il vient : $y = (e^{-1,42})^x * e^{(2,08)}$

Soit : $y = 0,24^x * 8$

d - En supposant que l'expression obtenue en c reste valable, déterminer le nombre d'unités de produit P que les consommateurs sont prêts à acheter si le prix de vente unitaire est fixe à 1,5 euros.

Pour prévoir la demande si le prix de vente unitaire est de 1,5 € il suffit de remplacer (dans l'équation ci-dessus) "x" par 1,5.

Donc ventes prévues $\Rightarrow y = 0,24^{1,5} * 8$

$\Rightarrow y = 0,94$ millier d'unités

Question 3 – Etude de l'offre

a - Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i ; z_i)$. Un ajustement affine par la méthode des moindres carrés de z en x est-il satisfaisant ? Pourquoi ?

Nous allons reprendre le même principe que pour la question 2 concernant la demande mais cette fois ci, il ne faut pas changer de variable.

| x_i PVu | z_i Demande | x_i^2 | $x_i * z_i$ | z_i^2 |
|--------------|------------------|----------------|--------------|----------------|
| 0,30 | 1,25 | 0,09 | 0,375 | 1,5625 |
| 0,35 | 1,30 | 0,1225 | 0,455 | 1,69 |
| 0,45 | 1,30 | 0,2025 | 0,585 | 1,69 |
| 0,65 | 1,50 | 0,4225 | 0,975 | 2,25 |
| 0,80 | 1,55 | 0,64 | 1,24 | 2,4025 |
| 1 | 1,60 | 1 | 1,60 | 2,56 |
| Total = 3,55 | Total = 8,5 | Total = 2,4775 | Total = 5,23 | Total = 12,155 |

$N = \text{Total des observations} = 6$

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i = 1/6 * 3,55 = 0,5917$$

$$\bar{Z} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n z_i = 1/6 * 8,5 = 1,42$$

$$V(x) = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right] - (\bar{X})^2 = [1/6 * 2,4775] - (0,5917)^2 = 0,0628$$

$$V(z) = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n z_i^2 \right] - (\bar{Z})^2 = [1/6 * 12,155] - (1,42)^2 = 0,0188889$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0,0628} = 0,2506$$

$$\sigma(z) = \sqrt{V(z)} = \sqrt{0,0188889} = 0,137436$$

$$\text{Cov}(xz) = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i z_i \right] - (\bar{X} \bar{Z}) = [1/6 * 5,23] - (0,5917 * 1,42) = 0,0347222$$

$$\text{Donc on peut maintenant calculer "r"} \Rightarrow r = \frac{\text{Cov}(xz)}{\sigma(x) * \sigma(z)} \Rightarrow r = \frac{0,0334722}{0,2506 * 0,137436} = 0,9718$$

Conséquence :

"r" étant proche de 1, il y a donc une forte corrélation entre les 2 variables et un ajustement linéaire est acceptable.

b - Donner une équation de la droite de régression de z en x sous la forme : $z = mx + p$ avec m et p arrondis au centième le plus proche.

Il vient donc :

$$m = \frac{\text{Cov}(xz)}{V(x)} = 0,03347 / 0,0628 = 0,53$$

$$p = \bar{z} - m\bar{x} = 1,42 - (0,53 * 0,5917) = 1,10$$

Conséquence, il vient : **$Y = 0,53x + 1,10$**

PARTIE B – Etude de fonctions

1. La détermination du sens de variation de f passe par l'étude de sa dérivée.

f est de la forme e^u avec $u = -1,41x + 2,08$.

La dérivée de $e^u = e^u * u'$

Donc :

$$f'(x) = e^{-1,41x + 2,08} * (-1,41)$$

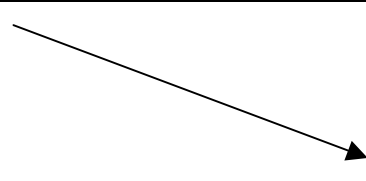
$$f'(x) = e^{-1,41x} * e^{2,08} * (-1,41)$$

$$f'(x) = -1,41 * \frac{e^{2,08}}{e^{1,41x}}$$

$$\left. \begin{array}{l} e^{2,08} > 0 \\ e^{1,41x} > 0 \\ -1,41 < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f'(x) \text{ est un signe de } (-1,41) \text{ quelque soit } x \\ \text{donc } f'(x) < 0 \text{ sur } [0 ; 1,5] \end{array}$$

$f'(x) < 0$ sur $[0;1,5]$ donc $f(x)$ est décroissante sur $[0;1,5]$

| | | |
|-------------|------|------|
| | 0 | 1,5 |
| -1,41 | | - |
| $e^{2,08}$ | | + |
| $e^{1,41x}$ | | + |
| $f'(x)$ | | - |
| $f(x)$ | 8,00 | 0,97 |



$$f(0) = e^{2,08} = 8,00$$

$$f(1,5) = e^{1,41x} \cdot 1,5 * e^{2,08} = 0,97$$

2 - Compléter le tableau de valeurs donné en annexe 1 dans lequel les valeurs de $f(x)$ seront arrondies à 10^{-2} près et, construire sur le graphique de la partie A la courbe représentative de f .

Il vient :

| | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| x | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 | 1,2 | 1,4 | 1,5 |
| f(x) | 8,00 | 6,04 | 4,55 | 3,43 | 2,53 | 1,95 | 1,47 | 1,11 | 0,97 |

3 - Construire sur le graphique précédent la courbe représentative de g

$g(x)$ est de la forme $ax + b$. Il s'agit d'une fonction affine. Sa représentation graphique est une droite de pente a et qui a pour origine b (x représente des euros donc il n'y a pas de continuité de la droite pour $x < 0$ donc b représente l'origine de la droite).

Donc $g(0) = 1,1$

Pour tracer la droite, nous avons besoin d'un deuxième point.

Par exemple pour $g(1) = 1,63$

4 - Déterminer graphiquement le prix d'équilibre du produit (à 10^{-1} près). En déduire le revenu total des producteurs pour le prix d'équilibre (arrondi à la centaine d'euros près).

Le prix d'équilibre du produit correspond à l'intersection de $f(x)$ avec $g(x)$.

Graphiquement, le prix d'équilibre est de 1,1 € (à 10^{-1} près).

Le revenu total des producteurs pour ce prix d'équilibre peut être déterminé par $f(x)$ ou $g(x)$, le prix d'équilibre (qui est x) étant l'intersection de $f(x)$ avec $g(x)$.

Notons R_T le revenu total des producteurs

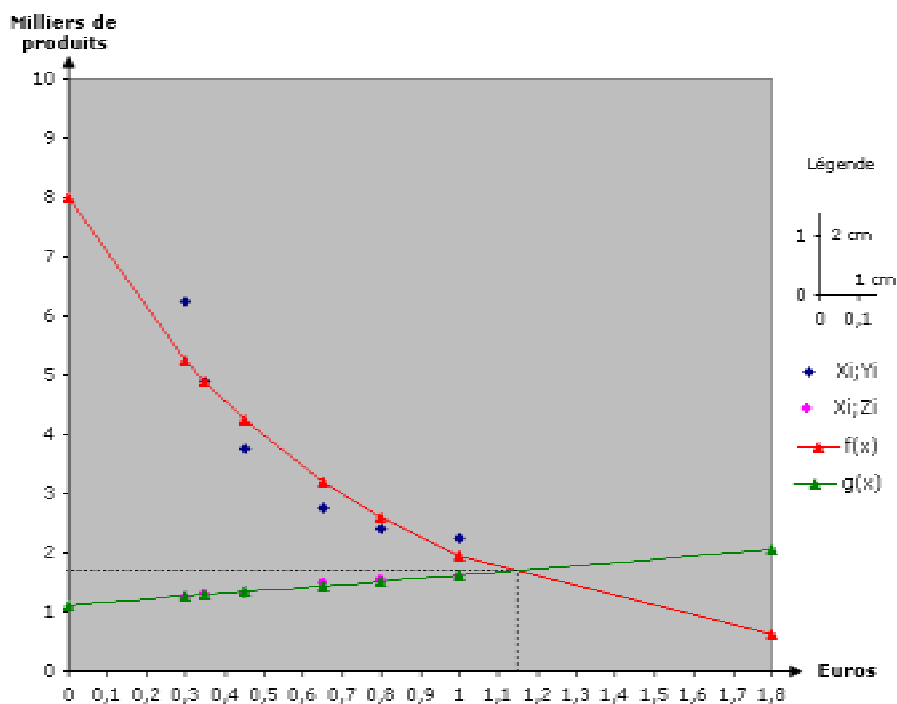
$R_T = \text{quantité produits} * \text{prix}$

$R_T = f(1,1) * 1,1 \approx 1,9$ (à la centaine d'euros près)

$R_T = g(1,1) * 1,1 \approx 1,9$ (à la centaine d'euros près)

Le revenu total des producteurs pour un prix d'équilibre de 1,1 € est de 1,9 milliers d'euros à la centaine d'euros près.

GRAPHIQUE



Correction exercice 2

1. Calculer l'annuité de remboursement

Rappels :

$$\text{Annuité constante} = (N) (VN) \left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \right]$$

Avec :

VN = Valeur nominale

N = Nombre total d'obligations émises

n = Durée de l'emprunt (exprimée en années)

i = Taux d'intérêt nominal (ou facial) annuel

Il vient :

$$\text{Annuité constante} = (8\ 000) (1\ 000) \left[\frac{0,058}{1 - (1,058)^{-8}} \right] = 1\ 278\ 108,98\ \text{€}$$

2. Présenter les deux premières lignes du tableau d'amortissement de cet emprunt ainsi que la dernière ligne

| Année | Dette en valeur nominale au début de l'année | Intérêt de l'année (1) | Nombre d'obligations à amortir en fin d'année (2) | Amortissement (3) | Annuité (4) |
|-------|--|----------------------------------|--|-----------------------------|-----------------------|
| 1 | 8 000 000 | 464 000 (a) | 814 (b) | 814 000 (c) | 1 278 000 (d) |
| 2 | 6 722 000 (e) | 389 876 (f) | 888 (g) | 888 000 (h) | 1 277 876 (i) |
| 8 | 1 208 000 (j) | 70 064 (k) | 1 208 (l) | 1 208 000 (m) | 1 278 064 (n) |

(1) => Intérêt de l'année = Dette restant due en début d'année * Taux d'intérêt annuel

(2) => Nombre d'obligations amorties = (Annuité - Intérêt) / Prix de remboursement d'une obligation
=> Dans cet exercice on doit arrondir le nombre d'obligations amorties à l'entier le plus proche
=> D'autre part, dans cet exercice : Prix de remboursement = Valeur nominale

(3) => Amortissement = Nombre d'obligations réellement amorties * Prix de remboursement

(4) => Il s'agit de l'annuité réelle => Intérêts + Amortissement réel

(a) => 8 000 000 * 0,058 = 464 000

(b) => (1 278 108,98 - 464 000) / 1 000 = 814,11 => Arrondi à 814 obligations

(c) => 814 * 1 000 = 814 000

(d) => 464 000 + 814 000 = 1 278 000

$$(e) \Rightarrow 8\,000\,000 - 1\,278\,000 = 6\,722\,000$$

$$(f) \Rightarrow 6\,722\,000 * 0,058 = 389\,876$$

$$(g) \Rightarrow (1\,278\,108,98 - 389\,876)/1\,000 = 888,23 \Rightarrow \text{Arrondi à } 888 \text{ obligations}$$

$$(h) \Rightarrow 888 * 1\,000 = 888\,000$$

$$(i) \Rightarrow 389\,876 + 888\,000 = 1\,277\,876$$

(j) => Ici on nous demande directement la dernière année de remboursement. Il existe plusieurs méthodes pour trouver directement la dette restant due au début d'une année. Nous allons utiliser la formule permettant de trouver le nombre d'obligations théoriques amorties (non arrondi) après "p" échéances.

Nous allons donc choisir la nombre d'obligations amorties après 7 échéances.

La formule est la suivante :

$$U_k = (N) \left[\frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Il vient :

$$U_k = (8\,000) \left[\frac{(1,058)^7 - 1}{(1,058)^8 - 1} \right] = 6\,791,92 \Rightarrow \text{Arrondi à } 6\,792 \text{ obligations}$$

Conséquences :

- Il reste à amortir lors de la dernière annuité : $8\,000 - 6\,792 = 1\,208$ obligations
- Dette restant à rembourser en valeur nominale = $1\,208 * 1\,000 = 1\,208\,000$

$$(k) \Rightarrow 1\,208\,000 * 0,058 = 70\,064$$

$$(l) \Rightarrow (1\,278\,108,98 - 70\,064)/1\,000 = 1\,208,04 \Rightarrow \text{Arrondi à } 1\,208 \text{ obligations}$$

$$(m) \Rightarrow 1\,208 * 1\,000 = 1\,208\,000$$

$$(n) \Rightarrow 1\,208\,000 + 70\,064 = 1\,278\,064$$

Remarque : Ceux qui ne se souvenaient pas d'une des formules permettant de trouver directement la dernière ligne pouvaient bien entendu (au brouillon) construire le tableau en entier ! Ce n'est pas "très élégant" mais cela permet de trouver la réponse !

3. Au bout de combien de temps aura-t-on amorti environ les deux tiers des obligations émises ?

On demande donc en combien de temps on aura amorti : $8\,000 * 2/3 = 5\,333$ obligations environ

=> On peut réutiliser la formule précédente et chercher l'inconnue => "p"

Il vient :

$$5\,333 = (8\,000) \left[\frac{(1,058)^p - 1}{(1,058)^8 - 1} \right]$$

$$\Rightarrow 5\,333 * [(1,058)^8 - 1] = 8\,000 * [(1,058)^p - 1]$$

$$\Rightarrow 5\,333 * 0,57 = 8\,000 * [(1,058)^p - 1]$$

$$\Rightarrow 3\,039,53 / 8\,000 = [(1,058)^p - 1]$$

$$\Rightarrow 0,38 = [(1,058)^p - 1]$$

$$\Rightarrow 0,38 + 1 = (1,058)^p$$

$$\Rightarrow 1,38 = (1,058)^p$$

$$\Rightarrow \ln 1,38 = \ln (1,058)^p$$

$$\Rightarrow \ln 1,38 = p * \ln (1,058)$$

$$\Rightarrow p = \ln 1,38 / \ln (1,058)$$

$$\Rightarrow p = 0,3220 / 0,05638 = 5,71 \text{ ans} \Rightarrow \text{Arrondi à 6 ans}$$

Vérification : Calculons le nombre d'obligations amorties après 6 échéances. Il vient :

$$x = (8\ 000) \left[\frac{(1,058)^6 - 1}{(1,058)^8 - 1} \right]$$

$$\Rightarrow x = 5\ 650,14$$

Remarque : Si on prend 5,71 (à la place de 6) on trouve exactement 5 333 obligations.

4. Calculer, à la date d'émission, le taux de rendement moyen.
Vérifier que le taux de revient de l'emprunt est égal à 6,1818 %.

- **Taux de rendement moyen**

Principe : On se place du côté de l'obligataire et on pose l'équation suivante :
Somme versée (Prix d'émission) = Somme perçue (Prix de remboursement)

Cette égalité étant effectuée au moment du versement du capital.

L'équation à résoudre est la suivante :

$$\frac{VN}{PE} * \left(\frac{t}{1 - (1 + t)^{-n}} \right) = \left(\frac{x}{1 - (1 + x)^{-n}} \right)$$

Avec :

VN = Valeur nominale

PE = Prix d'émission

t = Taux d'intérêt nominal (ou facial)

n = Durée de l'emprunt obligataire

x = Taux de rendement (ou de placement) moyen du souscripteur

Remarque : Si le prix de remboursement (PR) est différent de la VN, il suffit de remplacer VN par PR dans l'équation.

Nous allons raisonner sur une seule obligation. Il vient :

$$\frac{1\ 000}{990} * \left(\frac{0,058}{1 - (1,058)^{-8}} \right) = \left(\frac{x}{1 - (1 + x)^{-8}} \right)$$

$$\Rightarrow 0,161377396 = \left(\frac{x}{1 - (1 + x)^{-8}} \right)$$

On peut résoudre cette équation directement grâce aux calculatrices ou par interpolation linéaire.

Nous allons résoudre cette équation par interpolation linéaire.

$$\text{En prenant un taux de 6\% par exemple} \Rightarrow \left(\frac{0,06}{1 - (1,06)^{-8}} \right) = 0,16103594$$

$$\text{En prenant un taux de 7\% par exemple} \Rightarrow \left(\frac{0,07}{1 - (1,07)^{-8}} \right) = 0,16746776$$

Le taux de placement est donc entre 6% et 7% par définition

On peut donc poser le système suivant :

| | |
|-----|------------|
| 7 % | 0,16746776 |
| x | 0,16137740 |
| 6% | 0,16103594 |

Pour le résoudre on peut donc poser l'équation suivante :

$$\frac{x - 7}{6 - 7} = \frac{0,16137740 - 0,16746776}{0,16103594 - 0,16746776} \Rightarrow \frac{x - 7}{-1} = 0,946910828$$

$$\Rightarrow x - 7 = -1 * 0,946910828$$

$$\Rightarrow x = (-1 * 0,946910828) + 7$$

$$\Rightarrow x = 6,05\%$$

- Vérifier que le taux de revient de l'emprunt est égal à 6,1818 %.

Principe : On se place du côté de l'émetteur (l'entreprise)

$$\text{Il faut résoudre l'équation suivante : } \frac{VN}{PE - FE} * \left(\frac{t}{1 - (1 + t)^{-n}} \right) = \left(\frac{r}{1 - (1 + r)^{-n}} \right)$$

Avec :

VN = Valeur nominale

PE = Prix d'émission

FE = Frais d'émission

t = Taux d'intérêt nominal (ou facial)

n = Durée de l'emprunt obligataire

r = Taux de revient pour l'entreprise

Remarque : Si le prix de remboursement (PR) est différent de la VN, il suffit de remplacer VN par PR dans l'équation.

Nous allons raisonner sur une seule obligation. Il vient :

$$\frac{1\ 000}{990 - (1\ 000 * 0,5\%)} * \left(\frac{0,058}{1 - (1,058)^{-8}} \right) = \left(\frac{r}{1 - (1 + r)^{-8}} \right) \Rightarrow 0,16129657 = \left(\frac{r}{1 - (1 + r)^{-8}} \right)$$

L'énoncé nous donne le taux de revient : 6,1818%. Il suffit de remplacer "r" par cette valeur et vérifier le résultat. Le taux donné par l'énoncé est donc vérifié.