# MACROECONOMIE : LE COMPORTEMENT DE CONSOMMATION

Dans une première partie « Les analyses traditionnelles de la consommation », nous présentons les approches traditionnelles de la consommation : approche keynésienne contre approche friedmanienne. Une approche synthétique est alors développée dans le cadre d'un modèle intertemporel à deux périodes et en univers certain. Enfin, les spécifications les plus usuelles de la fonction de consommation sont développées et leurs propriétés analysées.

Dans une deuxième partie « Les modèles à anticipations rationnelles », nous présentons le modèle canonique de Hall. Il est intéressant d'analyser les conclusions théoriques et les faits stylisés auxquels ce modèle conduit : la consommation comme marche aléatoire qui s'explique par les révisions d'anticipation des revenus futurs, l'épargne comme prédicteur des revenus futurs. Si les agrégats de consommation semblent bien caractérisés par la présence d'une racine unitaire, l'impact de l'écart entre le revenu et la consommation, soit de l'épargne, sur la dynamique même de la consommation constitue une première entorse aux conclusions du modèle de Hall. Celle-ci devrait en effet être imprévisible car elle correspond aux seules révisions d'anticipations sur les revenus futurs. De plus, en confrontant la variance théorique déduite du modèle de Hall à la variance empirique de la variation de la consommation, Campbell et Deaton ont souligné le paradoxe d'une consommation trop lisse. Les modèles théoriques se sont alors développés afin de prendre en compte l'épargne de précaution et les contraintes de liquidité. Nous présentons également les conclusions obtenues à partir de modèles de simulation microéconomique, qui retiennent une fonction d'utilité assez générale, de type CCRA. Les faits stylisés qu'ils permettent de construire apparaissent plus réalistes que ceux déduits des précédentes approches : consommation plus lisse, profil de la consommation proche de celui du revenu.

## Plan

# PREMIERE PARTIE : Les analyses traditionnelles de la consommation

## I/ Le revenu : de Keynes à Friedman

### I.1/ L'approche keynésienne

Keynes (1936) a développé dans la théorie générale le concept de fonction de consommation afin d'argumenter son rejet de la loi de Say, d'après laquelle « toute offre crée ses propres débouchés ». Une idée fondamentale, connue sous le nom de loi psychologique, est que lorsque le revenu s'accroît, la consommation s'accroît mais dans une moindre mesure. Cette loi psychologique revêt en fait deux formes :

- La première forme de cette loi psychologique postule que lorsque le revenu s'accroît, et la consommation et l'épargne s'accroissent. En d'autres termes, la propension marginale à consommer est positive mais inférieure à l'unité. Citons Keynes : « La loi psychologique fondamentale, à laquelle nous pouvons faire toute confiance, à la fois a priori en raison de notre connaissance de la nature humaine et a posteriori en raison des enseignements détaillés de l'expérience, c'est qu'en moyenne et la plupart du temps les hommes tendent à accroître leur consommation à mesure que leur revenu croît, mais non d'une quantité aussi grande que l'accroissement du revenu ».
- La seconde forme de la loi psychologique postule que lorsque le revenu s'accroît, le taux d'épargne augmente. Citons à nouveau Keynes : « Les motifs des individus à satisfaire leurs principaux besoins actuels, personnels et familiaux, sont normalement plus puissants que leurs motifs à épargner, lesquels n'acquièrent une force réelle qu'au moment où un certain niveau de confort est atteint. Ces raisons font qu'en général une proportion de plus en plus importante du revenu est épargnée à mesure que le revenu réel s'accroît »

Cette loi psychologique est nécessaire à Keynes pour construire sa théorie générale. Elle lui permet notamment de comprendre que toute production et revenu supplémentaire n'est pas systématiquement consommée parce que l'épargne supplémentaire du consommateur n'est pas nécessairement investie. En fait, l'ajustement de l'épargne à l'investissement sera réalisé via celui de l'offre à la demande et par le jeu du multiplicateur des dépenses.

**Tableau 1** : Revenu, consommation et épargne

| | | | |
|---|---|---|---|
| Revenu | Consommation | | |
| | Epargne brute | Investissement | |
| | | Epargne financière | Monnaie |
| | | | Actifs financiers,Titres |

Le cadre théorique de la comptabilité nationale a développé des concepts très proches de la théorie keynésienne (cf. tableau 1), ce qui a permis par la suite le développement des travaux économétriques. Il faut toutefois rappeler que Keynes avait dès la théorie générale énoncé d'autres « facteurs objectifs » pour expliquer la consommation. Notamment les variations de la valeur du capital détenu : « La consommation de la classe possédante peut être extrêmement sensible aux variations imprévues de la valeur nominale de ses biens. Ce facteur doit être rangé parmi les causes principales des variations de courte période de la propension à consommer ».

### I.2/ Premiers tests et objections

Les premiers travaux menés à partir de données individuelles en coupe transversale ont permis de confirmer la loi psychologique de Keynes, notamment sous sa forme relative. Le taux d'épargne apparaît bien d'autant plus élevé que le revenu de l'individu est élevé. Au contraire, les premiers tests menés sur données agrégées en coupe longitudinale ont conduit à nuancer la loi psychologique :

- Kuznets, dans des travaux sur les Etats-Unis pour la période 1869-1938, a montré la constance sur longue période de la propension moyenne à consommer, c'est-à-dire du taux d'épargne ;
- Smithies a conclu à une forte sous-estimation de la propension marginale à consommer de long terme.

Des tentatives de réponse à ces premières critiques ont été avancées. Notamment, Brown, en réponse au constat de Smithies, explique qu'il existe des habitudes de consommation et qu'à court terme la consommation est inerte. La fonction de consommation s'écrit donc :

$$C_t = a + bY_t + cC_{t-1} \quad \text{avec} \quad 0 < b < 1 \quad \text{et} \quad 0 < c < 1$$

La propension marginale à consommer à long terme est donc égale à $\frac{b}{1-c}$ et est donc supérieure à la propension marginale à consommer à court terme $b$.

### I.3/ L'approche friedmanienne

Friedman va approfondir l'idée initie par Brown d'inertie de la consommation à court terme. Pour Friedman, la consommation n'est pas déterminée par le revenu courant mais par le revenu moyen anticipé, appelé revenu permanent. Ce revenu permanent, économiquement pertinent pour analyser les décisions de consommation, n'est pas observable statistiquement. Il diffère notamment du revenu courant, observable statistiquement mais qui est soumis à des fluctuations conjoncturelles sans grande importance pour les décisions de consommation. On retient pour la suite les notations suivantes :

$C$ : consommation
$Y$ : revenu courant
$Y^P$ : revenu permanent

Friedman veut montrer que la véritable fonction de consommation est $C = kY^P$ et que la fonction de consommation de type keynésienne $C = aY + b$ ne constitue qu'un artefact statistique. Imaginons trois situations (cf. figure 1) :

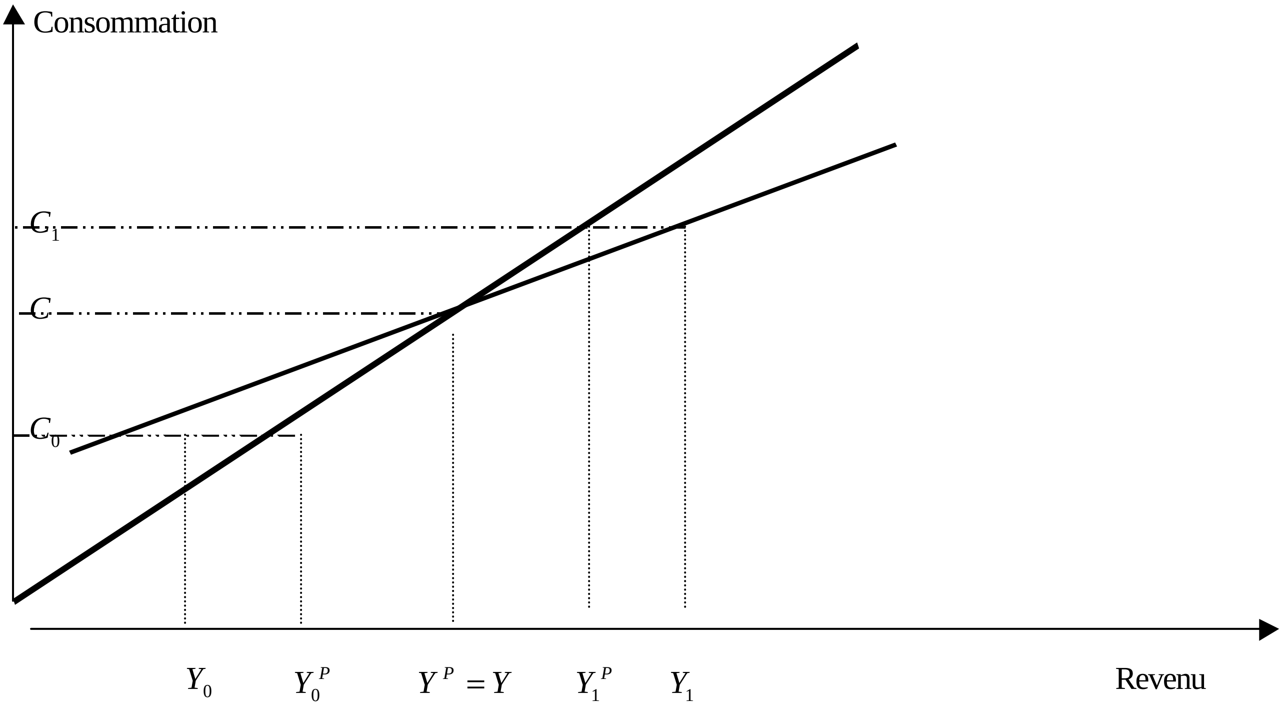
- Initialement, le revenu courant et le revenu permanent sont identiques : $Y = Y^P$ ;
- Puis, suite à une récession, le revenu courant diminue davantage que le revenu permanent : $Y_0 < Y_0^P$ ;
- Enfin, suite à une phase d'expansion, le revenu courant augmente davantage que le revenu permanent : $Y_1 > Y_1^P$

L'économiste keynésien estimera la fonction de consommation à partir des revenus courants et obtiendra une droite moins pentue que la véritable fonction de consommation :

- Fonction de consommation keynésienne : $(Y_0, C_0)$, $(Y, C)$ et $(Y_1, C_1)$
- Fonction de consommation friedmanienne : $(Y_0^P, C_0)$, $(Y^P, C)$ et $(Y_1^P, C_1)$

La fonction de consommation keynésienne apparaît ainsi moins sensible que la véritable fonction de consommation, c'est-à-dire qu'elle sous-estime la propension marginale à consommer. A ce titre, elle constitue un artefact statistique.

**Figure 1** : Consommation et revenu permanent




Le revenu permanent, revenu moyen anticipé, est défini le plus souvent à partir d'un schéma d'anticipations adaptatives (cf. IV.2), ce qui conduit à exprimer le revenu permanent comme une moyenne géométrique du flux de revenus passés :

$$Y_t^P = (1-\lambda)\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i Y_{t-i} \quad \text{avec} \quad 1 > \lambda > 0$$

On a la fonction de consommation :

$$C_t = kY_t^P$$

En calculant $C_t - \lambda C_{t-1}$, on obtient :

$$C_t = k(1-\lambda)Y_t + \lambda C_{t-1}$$

Remarquons que cette spécification friedmanienne de la fonction de consommation permet d'intégrer la critique de Kuznets (élasticité unitaire de la consommation par rapport au revenu, c'est-à-dire taux d'épargne constant) et celle de Smithies (propension marginale à consommer le revenu de court terme inférieure à la propension marginale à consommer de long terme).

**Exercice 1** : On dispose de données de panel sur la consommation de $n$ individus et $T$ périodes. On note $C_{i,t}$ la consommation de l'individu $i$ à la date $t$, $Y_{i,t}$ son revenu. Le revenu à un instant donné est supposé décomposable en deux composantes, l'une transitoire et l'autre permanente :
pour $t = \bar{t}$ , $Y_{i,t} = Y_{i,t}^P + Y_{i,t}^T$
Les hypothèses suivantes sont posées :

- La composante transitoire à un instant $t = \bar{t}$ est de moyenne nulle : $Y_{.,\bar{t}}^T = 0$ ;
- Les composantes transitoires et permanentes sont indépendantes à un instant $t = \bar{t}$ : $Cov\left(Y_{.,\bar{t}}^T, Y_{.,\bar{t}}^P\right) = 0$
- La consommation d'un individu s'explique par son revenu permanent : $C_{i,t} = Y_{i,t}^P$

Expliquer pourquoi les estimations sur données individuelles transversales corroborent l'hypothèse de fonction de consommation à la keynésienne et pourquoi les estimations sur données agrégées longitudinales l'invalident.

## II/ Le cycle de vie

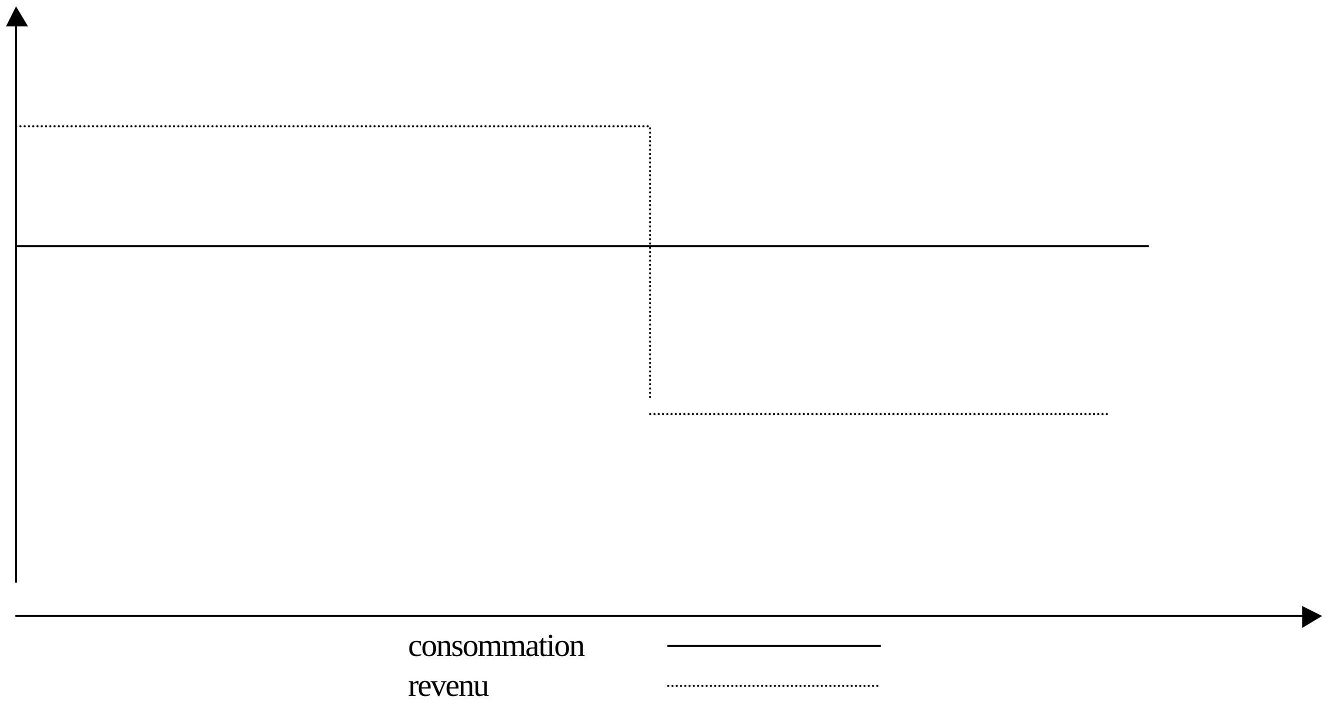
La consommation et l'épargne d'un individu est étudiée en fonction de l'âge de l'individu. L'approche du cycle de vie (Modigliani) retient l'idée d'une consommation relativement inerte. Au contraire, le profil du revenu est plus heurté : élevé en début d'activité, il diminue lorsque l'individu prend sa retraite ou ne peut plus travailler physiquemement. Il en résulte un profil de l'épargne en cloche : phase d'épargne en période d'activité, puis désépargne lors des « vieux jours » (cf. figure 2). Bien entendu, ces premières conclusions peuvent être enrichies si l'on considère un autre profil de revenu : faible revenu lorsque l'individu commence à travailler, puis revenu élevé lorsqu'il est en pleine phase d'activité, puis absence de revenu lorsque l'on ne travaille plus. L'individu jeune emprunte lorsqu'il commence à travailler, puis rembourse ses emprunts de jeunesse lorsque ses revenus s'élèvent et constitue enfin une épargne en prévision de sa retraite.

La prise en compte d'un cycle de vie dans le comportement d'épargne et de consommation a pu être naturellement appliquée pour comprendre les flux internationaux d'épargne. Notamment, le niveau élevé de l'endettement des pays en développement a pu être expliqué par la structure de leur population, relativement jeune et à faible capacité d'épargne. Ainsi, Deaton, dans la continuité des travaux de Ram (1982), a pu estimer l'équation réduite suivante :

$$\frac{s}{y} = 0{,}068 + \underset{(5,5)}{1{,}30}\, g + \underset{(1,3)}{0{,}17}\, active + \ldots \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \bar{R}^2 = 0{,}59 \\ S.E = 0{,}0549 \end{array}$$

où $active$ est la proportion de la population âgée de 15 à 64 ans et où les autres régresseurs à sont le niveau du revenu national et les termes de l'échange.

**Figure 2** : Une représentation élémentaire du modèle de cycle de vie




## III/ Un modèle intertemporel à deux périodes et en univers certain

### III.1/ Rappels de théorie micro-économique

On considère une économie à *n* biens, de quantité $x_h$ et de prix $p_h$ pour $h=1,\ldots n$ (Malinvaud 1975). L'équilibre d'un consommateur de revenu *R* est donné par le programme :

$$\underset{\{x_h\}}{Max}\, U(x_1,\ldots,x_n) \qquad \text{sc.} \qquad \sum_{h=1}^{n} p_h x_h = R$$

Soient les conditions de premier ordre, avec $\lambda$ le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de revenu :

$$\begin{cases} U'_h - \lambda p_h = 0 \\ \sum_{h=1}^{n} p_h x_h = R \end{cases}$$

Nous étudions maintenant la variation de cet équilibre suite à une variation des prix $dp$ et du revenu $dR$ :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} U''_{hk} dx_k - p_h d\lambda - \lambda dp_h = 0 \\ \sum_{h=1}^{n} p_h dx_h + \sum_{i=1}^{n} x_h dp_h = dR \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1/\lambda \sum_{k=1}^{n} U''_{hk} dx_k - U'_h / \lambda d\lambda = dp_h \\ 1/\lambda \sum_{h=1}^{n} U'_h dx_h = dR - \sum_{i=1}^{n} x_h dp_h \end{cases}$$

Matriciellement, on peut donc écrire :

$$\frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix} U^{''} & -U^{'} \\ -\left(U^{'}\right)^{tr} & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx \\ d\lambda/\lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_n & O \\ x^{tr} & -\vec{1} \end{bmatrix}$$

avec les notations suivantes :

$U^{''}$ : matrice hessienne, semi-définie négative du fait de la concavité de $U$

$U^{'}$ : matrice gradient

$x$ : matrice colonne des quantités de bien

En supposant que la matrice $\begin{bmatrix} U^{''} & -U^{'} \\ -\left(U^{'}\right)^{tr} & O \end{bmatrix}$ est inversible, en posant :

$$\lambda\begin{bmatrix} U^{''} & -U^{'} \\ -\left(U^{'}\right)^{tr} & O \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A & -v \\ -v^{tr} & w \end{bmatrix}$$

Puisque $U^{''}$ est semi-définie négative, la matrice $A$ l'est aussi. On obtient alors :

$$\begin{bmatrix} dx \\ d\lambda/\lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & -v \\ -v^{tr} & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & O \\ x^{tr} & -\vec{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dp \\ dR \end{bmatrix}$$

La variation de la demande d'équilibre est donnée par :

$$dx = \underbrace{Adp}_{\substack{effet \\ substitution}} + v\underbrace{\left(dR - x^{tr}dp\right)}_{\substack{variation\,compensée \\ du\,revenu}}$$

### III.2/ Un modèle de choix du consommateur à deux périodes en univers certain

#### III.2.a/ Les hypothèses

Nous étudions les choix d'un consommateur sur deux périodes, notées respectivement 0 et 1. L'univers est certain c'est-à-dire que les prévisions du consommateur sont parfaites. En début de période 0, le consommateur dispose d'un actif initial $A_0$ (nominal). Au cours de la période 0, il perçoit un revenu $R_0$ (nominal) et touche des revenus d'intérêt $rA_0$. Il répartit ses ressources entre épargne $E_0$ et consommation $C_0$ :

$$p_0C_0 + E_0 = rA_0 + R_0$$

Le stock d'actif disponible en début de période 1 est noté $A_1$ et est défini par l'actif initial $A_0$ et le flux d'épargne $E_0$ :

$$A_1 = A_0 + E_0 = (1+r)A_0 + R_0 - p_0C_0$$

Au cours de la période 1, le consommateur perçoit un revenu $R_1$ (nominal) et touche des revenus d'intérêt $rA_1$. On suppose que son utilité intertemporelle dépend également du patrimoine légué à sa descendance, $A_2$ . Au cours de la période 1, il peut donc continuer à épargner pour augmenter son patrimoine. On a donc :

$$p_1C_1 + E_1 = rA_1 + R_1$$

et

$$A_2 = A_1 + E_1 = (1+r)A_1 + R_1 - p_1C_1$$

Si le patrimoine légué ne constituait pas un objectif du consommateur, le patrimoine final serait intégralement consommé et on aurait donc :

$$A_2 = 0 \Rightarrow p_1 C_1 = (1+r)A_1 + p_1 C_1$$

Le programme du consommateur est :

$$\underbrace{Max}_{C_0, C_1, A_2} U(C_0, C_1, A_2)$$

$$sc. \begin{cases} p_0 C_0 + E_0 = rA_0 + R_0 \\ p_1 C_1 + E_1 = rA_1 + R_1 \end{cases}$$

On retient l'hypothèse de marchés financiers parfaits. Le consommateur peut donc emprunter sans limite quantitative au taux d'intérêt de marché. Les contraintes de revenu de chacune des deux périodes peuvent alors s'écrire sous la forme d'une contrainte intertemporelle de budget. Par exemple, exprimée en unités monétaires de la période 1 :

$$(1+r)C_0 + \frac{p_1}{p_0}C_1 + \frac{A_2}{p_2} = (1+r)\frac{R_0}{p_0} + \frac{R_1}{p_0} + (1+r)^2 \frac{A_0}{p_0} = R$$

*R* est le revenu permanent anticipé pour l'ensemble des périodes. Cette contrainte intertemporelle de revenu s'établit simplement en remarquant que les deux contraintes de revenu s'écrivent aussi :

$$\begin{cases} A_1 = (1+r)A_0 + R_0 - p_0 C_0 \\ A_2 = (1+r)A_1 + R_1 - p_1 C_1 \end{cases}$$

En l'hypothèse de marchés financiers parfaits, le patrimoine de fin de première période peut prendre toute valeur car les capacités d'emprunt ne sont pas limitées. Il suffit alors d'actualiser la première contrainte budgétaire et d'additionner ensuite les deux contraintes pour obtenir la contrainte intertemporelle. On peut remarquer que le patrimoine légué est exprimé en nominal ; pour les calculs qui doivent être menés par la suite, il est plus utile de faire apparaître explicitement les prix relatifs en réécrivant la contrainte de budget intertemporel comme suit :

$$(1+r)C_0 + \frac{p_1}{p_0}C_1 + \frac{A_2}{p_2}\frac{p_2}{p_0} = (1+r)\frac{R_0}{p_0} + \frac{R_1}{p_0} + (1+r)^2 \frac{A_0}{p_0} = R$$

où $p_2$ est le prix de début de deuxième période.

### III.2.b/ La résolution

Le programme du consommateur devient alors :

$$\underbrace{Max}_{C_0, C_1, A_2} U(C_0, C_1, A_2)$$

$$sc. \left\{ (1+r)C_0 + \frac{p_1}{p_0}C_1 + \frac{A_2}{p_0} = R \right.$$

Nous étudions maintenant l'impact de certaines variables sur les choix du consommateurs au cours de la première période, à savoir la consommation (en volume) $C_0$ et l'épargne en pouvoir d'achat $E_0 / p_0$ . Les déterminants étudiés sont successivement le revenu courant, l'actif courant, le revenu anticipé, les prix courants , les prix anticipés et les taux d'intérêt.

Pour étudier l'impact de ces différents déterminants de la consommation, on peut utiliser l'équation qui permet de décomposer les variations de la demande d'équilibre entre par les effets de substitution et les effets de revenu (cf. Malinvaud 1975) :

$$dC_0 = a_{00}dr + a_{01}d\frac{p_1}{p_0} + a_{02}d\frac{p_2}{p_0} + v_0 dR^c$$

avec $dR^c$ la variation compensée du revenu :

$$dR^c = dR - C_0 dr - C_1 d\frac{p_1}{p_0} - \frac{A_2}{p_0}d\frac{p_2}{p_0}$$

Les coefficients $a_{00,}a_{01}$ et $a_{02}$ constituent la première ligne de la matrice *A*, semi-définie négative. On a donc :

$$a_{00} < 0,\ a_{01} > 0 \text{ et } a_{02} > 0$$

De plus, comme on suppose que le bien de consommation ne constitue pas un bien supérieur, on a :

$$v_0 > 0$$

Pour calculer l'impact des différents déterminants sur l'épargne de la période courante, on pourra différencier la contrainte de revenu de la période courante :

$$p_0C_0 + E_0 = rA_0 + R_0$$

### III.2.c/ Les principaux résultats

- Impact du revenu courant en pouvoir d'achat : $R_0/p_0$

$$\frac{\partial C_0}{\partial R_0/p_0} = v_0(1+r) > 0$$

$$\frac{\partial E_0/p_0}{\partial R_0/p_0} = 1 - v_0(1+r) > 0 \quad \text{si} \quad v_0(1+r) > 1$$

Une augmentation du revenu courant entraîne une augmentation de la consommation courante. La conclusion d'une propension marginale à consommer inférieure à l'unité ne peut pas être strictement dérivée dans ce cadre. On supposera donc que cette hypothèse est vérifiée par la suite, c'est-à-dire que $v_0(1+r) < 1$.

- Impact de l'actif courant en pouvoir d'achat : $A_0/p_0$

$$\frac{\partial C_0}{\partial A_0/p_0} = v_0(1+r)^2 > 0$$

$$\frac{\partial E_0/p_0}{\partial A_0/p_0} = 1 - v_0(1+r) \quad \text{si} \quad v_0(1+r) > 0$$

Une augmentation de l'actif initial conduit à une augmentation de la consommation dès la période présente, du fait de l'augmentation du revenu permanent anticipé *R*. Si on retient l'hypothèse d'une propension marginale à consommer le revenu courant inférieure à l'unité, alors l'augmentation de l'actif initial conduit à une réduction de l'épargner sur la période courante. Disposant d'un revenu permanent plus important, le consommateur peut l'utiliser afin de lisser le profil de sa consommation et donc épargner moins dès la première période.

- Impact du revenu anticipé en pouvoir d'achat de la période courante : $R_1 / p_0$

$$\frac{\partial C_0}{\partial R_1 / p_0} = v_0 > 0$$
$$\frac{\partial E_0 / p_0}{\partial R_1 / p_0} = -v_0 < 0$$

Conformément à l'approche friedmanienne, le revenu anticipé influence la consommation d'aujourd'hui. De plus, les revenus futurs étant plus élevés, le consommateur a besoin d'épargner moins au cours de la période courante pour s'assurer une même consommation dans le futur.

- Impact de l'inflation contemporaine : $p_0$

$$\frac{\partial C_0}{\partial p_0} = -\left( a_{01} \frac{p_1}{p_0} + a_{02} \frac{p_2}{p_0} \right) \frac{dp_0}{p_0} - v_0 (1+r) C_0 \frac{dp_0}{p_0} < 0$$

Quand les prix contemporains augmentent, la consommation diminue pour deux raisons :

- Effet de substitution : la hausse des prix conduit le consommateur à reporter sa consommation dans le futur. En effet, le terme $-\left( a_{01} \frac{p_1}{p_0} + a_{02} \frac{p_2}{p_0} \right)$ est positif.
- Effet de revenu : l'augmentation des prix actuels provoque une perte de pouvoir d'achat du revenu anticipé et donc une diminution de la consommation. En effet, le terme $v_0 (1+r) C_0$ est positif.

$$\frac{\partial E_0 / p_0}{\partial p_0} = -\frac{\partial C_0}{\partial p_0} > 0$$

Quand les prix contemporains augmentent, l'épargne augmentent.

- Impact de l'inflation anticipée

$$\frac{\partial C_0}{\partial p_1} = \left( \underbrace{a_{01}}_{\substack{effet \\ substitution}} \quad - \underbrace{v_0 C_1}_{\substack{effet \\ revenu}} \right) p_0^{-1}$$

$$\frac{\partial E_0 / p_1}{\partial p_1} = -\left( \underbrace{a_{01}}_{\substack{effet \\ substitution}} \quad - \underbrace{v_0 C_1}_{\substack{effet \\ revenu}} \right) p_0^{-1}$$

Une augmentation de l'inflation anticipée a deux effets contraires :

- Un effet de substitution : une augmentation du prix futur augmente le prix de la consommation future et conduit à consommer plus du bien courant. Cet effet de substitution est parfois appelé *« fuite devant la monnaie »* : face à l'inflation anticipée, l'agent économique préfère consommer plus aujourd'hui et éventuellement stocker les biens.
- Un effet revenu : une augmentation future des prix diminue le pouvoir d'achat du revenu permanent anticipé et donc le consommateur réduit sa consommation présente. Dans les revenus industriels où les revenus sont fortement indexés sur les prix anticipés, on peut penser que cet effet est peu important.

- Impact du taux d'intérêt

$$\frac{\partial C_0}{\partial r} = \underbrace{a_{00}}_{\substack{\text{effet}\\ \text{substitution}}} + \underbrace{\left(R_0/p_0 + 2(1+r)A_0/p_0 - C_0\right)}_{\substack{\text{effet}\\ \text{revenu}}}$$

$$\frac{\partial E_0/p_0}{\partial r} = -\frac{\partial E_0}{\partial r} + \frac{A_0}{p_0}$$

Une hausse du taux d'intérêt a pour conséquence de renchérir le prix de la consommation présente par rapport à la consommation future mais aussi d'accroître les revenus futurs d'épargne. Une augmentation des taux d'intérêt a donc deux conséquences contradictoires sur la consommation courante :

- Un effet substitution : le prix de la consommation future est plus élevé et réduit donc la consommation présente. Le consommateur aurait plutôt intérêt à épargner plus et à consommer son surplus d'épargne en période 1.
- Un effet revenu : pour les créanciers, l'augmentation du taux d'intérêt entraîne un accroissement des revenus futurs d'épargne et donc de leur revenu permanent anticipé. Le revenu anticipé augmentant, la consommation courante augmente. Par contre, si le consommateur est débiteur $(A_0 < 0)$, l'effet revenu peut également conduire à une baisse de la consommation présente.

**Tableau 2** : Principaux déterminants de la consommation

| | **Consommation** | **Epargne** |
|---|---|---|
| Revenu courant | + | + si propension marginale à consommer < 1 |
| Actif initial | + | - si propension marginale à consommer < 1 |
| Revenu anticipé | + | - |
| Prix courant | - | + |
| Prix anticipé | ? ? | ? ? |
| Taux d'intérêt | ? ? | ? ? |

# IV/ Spécification d'une équation de consommation

## IV.1/ Spécification de la dynamique des comportements

La théorie permet de spécifier certaines équations structurelles de comportement, qui peuvent à court terme être non vérifiées du fait de coût d'ajustement par exemple. Les spécifications à correction d'erreur, Error Correction Model en anglais, permettent de distinguer dans la spécification ce qui relève de la théorie économique d'une part, d'une dynamique de court terme ad hoc d'autre part :

- La relation structurelle définit une cible $Y_t^*$ (par exemple, les prix désirés par les entreprises si l'on parle de la formation des prix) par rapport à des variables explicatives $X_t$ : $Y_t^* = f(X_t)$. Cette spécification est généralement de type log-linéaire ou linéaire.
- L'ajustement aux déséquilibres spécifié de façon ad hoc comme suit : $\frac{Y_t}{Y_{t-1}} = \left(\frac{Y_t^*}{Y_{t-1}^*}\right)^a \left(\frac{Y_{t-1}^*}{Y_{t-1}}\right)^b$ avec $a > 0, b > 0$. Les variations effectives de la variable modélisée s'explique pour une proportion α par les variations de la cible, et donc des variables explicatives, et pour une proportion λ par les écarts à la cible, ou déséquilibre, de la période antérieure.

On a donc :

$$\Delta Log(Y_t) = a\Delta Log(X_t) + b\left[f(X_{t-1}) - Y_{t-1}\right]$$

La variable $Y_t$ s'accroît avec les variables explicatives de la cible mais aussi lorsqu'à la période antérieure la valeur effective $Y_{t-1}$ était inférieure à la cible $f(X_{t-1})$ de la même période.

## IV.2/ La modélisation des anticipations dans les modèles macroéconométriques

Le schéma d'*anticipations adaptatives* postule que l'agent révise ses anticipations en proportion des erreurs de la période précédente. On suppose que l'agent observe la variable $x_t$ est observée à la date t et qu'il anticipe alors ${}_t Ex_{t+1}$ pour la période suivante. Formellement, on a donc :

$$\underbrace{{}_t Ex_{t+1} - {}_{t-1}Ex_t}_{\text{revision des anticipations}} = b \underbrace{\left(x_t - {}_{t-1}Ex_t\right)}_{\text{erreur de prevision en t-1}}$$

Les anticipations peuvent donc être modélisées comme suit :

$${}_t Ex_{t+1} = b\sum_{i=0}^{\infty}(1-b)^i x_{t-i}$$

Le coefficient $b$ traduit l'importance de la mémoire. Plus il est faible, plus l'ajustement des anticipations aux dernières observations sera rapide. On peut en effet calculer le délai moyen d'ajustement des anticipations aux observations : $b\sum_{i=0}^{\infty} i(1-b)^i = \frac{1-b}{b}$.

Ce type de modélisation pourrait paraître désuet. Il est cependant utile de rappeler qu'il est optimal si la série $x_t$ suit un processus ARIMA(0,1,1)[1] :

[1] C'est ce processus que Nelson et Plosser (1982) retiennent pour modéliser les agrégats macroéconomiques aux Etats-Unis.

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t + \rho\varepsilon_{t-1} \Rightarrow {}_{t-1}Ex_t = x_t - \underbrace{\varepsilon_t}_{innovations}$$

*Donc* :

$$x_{t+1} = x_t + \varepsilon_{t+1} + \rho\varepsilon_t \Rightarrow {}_{t+1}Ex_t = x_t + \rho\{x_t - {}_{t-1}Ex_t\}$$

*D'où* :

$${}_tEx_{t+1} - {}_tEx_{t-1} = (1+\rho)\{x_t - {}_{t-1}Ex_t\}$$

Ce type de modélisation des anticipations implique que l'agent persiste durablement dans ces erreurs d'anticipation. Supposons une trajectoire de référence nulle. A partir de la date $t_0$, la variable subit un choc durable d'une unité : si $t \geq t_0$ alors $x_t = 1$. Les anticipations de l'agent à la date $t$ sont données par :

$${}_tEx_{t+1} = \beta\sum_{i=0}^{\infty}(1-\beta)^i x_{t-i} = \beta\sum_{i=0}^{t-t_0}(1-\beta)^i = 1-(1-\beta)^{t-t_0} < 1 = x_{t+1}$$

C'est seulement asymptotiquement que les erreurs d'anticipation disparaissent.

### IV.3/ Propriétés d'une équation de consommation

Parmi les facteurs explicatifs de la consommation des ménages, le revenu et l'inflation constituent les deux principaux déterminants.

Les spécifications les plus usuelles de la fonction de consommation des ménages différent selon qu'elles considèrent constante ou l'élasticité ou la propension marginale à consommer le revenu. Si le paramètre supposé constant est l'élasticité de la consommation par rapport au revenu, on a la spécification :

$$Log(C) = a_1 Log(C_{-1}) + a_2 Log(Y) + a_3 \Delta Log(p)$$

avec $C$ : consommation en volume
$Y$ : revenu en pouvoir d'achat
$p$ : prix à la consommation

L'inflation peut avoir deux effets de signe contraire :

- Elle peut réduire le patrimoine des ménages et conduirent ces derniers à accroître leur stock de patrimoine. Par exemple, face à une hausse des prix, les ménages se trouvent dans l'obligation de reconstituer leurs encaisses monétaires nominales pour en maintenir le pouvoir d'achat et donc de réduire leur consommation ; c'est l'effet d'encaisses réelles.
- Elle peut conduire les ménages à avancer leurs achats, en fait à substituer la consommation d'aujourd'hui moins chère à mla consommationde de demain plus chère. C'est l'effet fuite devant la monnaie, favorable à la consommation des ménages.

Si l'effet d'encaisses réelles domine, ce qui est le cas le plus fréquent, le signe du coefficient $a_3$ sera négatif.

Il vaut la peine de noter que cette spécification est compatible avec l'hypothèse d'une consommation dépendant d'un revenu permanent $Y_p$ défini comme une moyenne des flux passés du revenu. Si on suppose que la consommation dépend d'un revenu permanent ($C = kY_P$) et que ce dernier est défini comme une moyenne géométrique des revenus passés, on obtient :

$$C = k\prod_{i=0}^{\infty} Y_{t-i}^{a_i} \qquad \text{avec } a_i = a_0\lambda^i \text{ et } 0 < \lambda < 1$$

Soit :

$$Log(C) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i Log(Y_{t-i})$$

**Exercice 2**

Calculer le délai moyen d'ajustement de la consommation au revenu dans la spécification suivante :

$$LogC_t = a_1 LogC_{t-1} + a_2 LogY_t$$

Cette spécification est rarement estimée en niveau[1]. Sous l'hypothèse d'un résidu autorégressif, la variable explicative $C_{-1}$ dépend de l'aléa et l'estimateur des Moindres Carrés Ordinaires ne converge pas. De plus, les variables de consommation et de pouvoir d'achat du revenu sont des variables intégrées d'ordre 1. On estime donc le plus souvent une forme différenciée avec une force de rappel sur les niveaux. L'équation est implicitement une forme à correction d'erreur (ECM) et peut s'écrire :

$$\Delta Log(C) = a_2 \Delta Log(Y) + (a_1 - 1)\left[Log(C_{-1}/Y_{-1}) + a_3/(a_1-1)\Delta Log(p) + (a_2 + a_1 - 1)/(a_1-1) Log(Y_{-1})\right]$$

Dans une telle spécification, le long terme peut être analysé à deux niveaux :

- *état stationnaire* ($C = C_{-1}$ ; $Y = Y_{-1}$). On a alors une élasticité de la consommation par rapport au revenu unitaire si $a_1 + a_2 = 1$.
- *croissance régulière* ($C/C_{-1} = Y/Y_{-1}$). L'équation de long terme est alors donnée par le terme entre crochets. Le rapport de la consommation au revenu dépend négativement du taux de croissance du pouvoir d'achat du revenu. Le taux d'épargne évoulue de façon procyclique et joue donc un rôle stabilisateur des fluctuations économiques.

A long terme, le taux d'épargne dépend également du taux d'inflation, qui dans la spécification intervient dans la force de rappel.

Si le paramètre supposé constant est la propension marginale à consommer (à court terme mais aussi à long terme), on a :

$$C/Y = a_1 C_{-1}/Y + a_2 + a_3 \Delta Log(p)$$

Dans une telle spécification (retenue par exemple dans le modèle français trimestriel Mosaïque de l'OFCE ou dans les premières versions de Metric), l'élasticité de la consommation par rapport au revenu dépend du niveau du taux d'épargne à court terme comme à long terme. Par exemple, à court terme, on a :

$$\left[\Delta C / C_{-1}\right] / \left[\Delta Y / Y_{-1}\right] = a_2 / (1 - Tep_{-1})$$

[1] A l'exception du modèle AMADEUS dans sa version de 1991 et MIMOSA.

**Tableau 3 :** Elasticités revenu et prix de la consommation dans les principaux modèles macroéconomiques français

| | **Revenu réel** | | **Inflation** | |
|---|---|---|---|---|
| | Court terme (1an) | Long terme | Court terme (1an) | Long terme |
| Amadeus | 0,48 | 1 | -0,40 | -1,02 |
| BdF | 0,36 | 1 | -0,23 | -0,56 |
| Hermes | 0,45 | 1 | -0,34 | -1,60 |
| Metric non fongibles | 0,38 | 1 | -0,25 | -1,08 |
| Mosaique | 0,50 | 1 | -0,32 | -0,83 |

Source : "Structures et propriétés de cinq modèles macroéconomiques français" BDF-CEPREMAP-DP- ERASME-INSEE-OFCE.

## DEUXIEME PARTIE : Les modèles à anticipations rationnelles (PI/LCH)[2]

### I/ Une modélisation en univers incertain

Cette approche peut susciter différentes remarques. Le revenu est supposé constant. Aussi peut-on le comprendre comme le revenu permanent théorisé par Friedman. Pour pouvoir tester la théorie du revenu permanent dans le cadre du cycle de vie, le profil du revenu doit être intégré. Ce profil du revenu est inconnu du consommateur à l'instant $t$, aussi l'analyse doit-elle intégrer la formation des anticipations. Dans le souci d'un rapprochement avec la théorie du revenu permanent, une extension naturelle de l'approche de cycle de vie est donc de retenir un cadre intertemporel en univers incertain.

De plus, le profil d'épargne issu d'une analyse de cycle de vie est esquissé au niveau de l'agent consommateur. Aussi est-il naturel de chercher à en comprendre les fondement micro économiques. Il s'agit ici de prendre en compte la préférence pour le présent du consommateur, qui peut l'amener à consommer davantage en début de cycle de vie, ainsi que ses préférences.

Les deux points précédents nous amènent donc à considérer le programme de maximisation intertemporelle suivant. On note la consommation $c_t$, le revenu (hors charge d'intérêt) $y_t$, la richesse des ménages (à la fin de la période $t$) $W_t$. La fonction d'utilité élémentaire $u$ est concave. Le taux d'intérêt réel est $r$ et le taux de préférence pour le présent du consommateur est $\boldsymbol{r}$. Le coefficient d'actualisation du consommateur est quant à lui noté $\boldsymbol{b}$[3].

$$Max \underset{t}{E} \sum_{i=0}^{T} \boldsymbol{b}^i u(c_{t+i})$$

$$\text{sc. } W_{t+1+i} = (1+r)\left(W_{t+i} + y_{t+i} - c_{t+i}\right)$$

L'hypothèse d'aversion pour le risque constante conduit à retenir la spécification suivante pour la fonction d'utilité isoélastique ou encore CCRA, Constant Coefficient Relative Risk), (cf. annexe 1 pour une définition de l'aversion par rapport au risque) :

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-d}}{1-\boldsymbol{d}}$$

où l'aversion relative par rapport au risque :

$$\boldsymbol{d} = -\frac{u^{''} c}{u^{'}}$$

Si on suppose que l'aversion relative par rapport au risque est unitaire, on a :

$$u(c_t) = \ln(c_t)$$

Les résultats de base du modèle de Modigliani peuvent de ca cadre théorique, si à l'hypothèse de fonction de type Cobb-Douglas, on ajoute celles d'environnement certain et de taux de préférence

---

[2] Permanent Income/ Life Cycle Hypothesis.

[3] On a donc $\boldsymbol{b} = \dfrac{1}{1+\boldsymbol{r}}$.

pour le présent nul. Alors, sous l'hypothèse de marchés financiers parfaits, la contrainte de revenu intertemporelle du consommateur s'écrit :

$$\sum_{i=0}^{T}(1+r)^{-i}c_{t+i}=W_t+\sum_{i=0}^{T}(1+r)^{-i}y_{t+i}$$

Si la répartition de la consommation est égale entre chaque période, on a donc :

$$\bar{c}=\frac{r}{1+r}\left[W_t+\sum_{i=0}^{T}(1+r)^{-i}y_{t+i}\right]$$

Notons que ce résultat peut être obtenu pour une fonction d'utilité où les consommations de chaque période apparaissent strictement complémentaires, sans possibilité de substitution intertemporelle, c'est-à-dire que l'utilité globale est définie par le minimum de toutes les consommations[4].

Supposons de plus que le revenu croît à un taux constant $g\ \left(y_{t+i}=(1+g)^i y_t\right)$ et que l' horizon temporel des agents est infini, on obtient alors :

$$\bar{c}=\frac{r}{1+r}\left[W_t+y_t\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1+r}{1+g}\right)^i\right]$$

Supposons de plus que le taux d'intérêt réel est supérieur au taux de croissance du revenu, on obtient alors :

$$\bar{c}=\frac{r}{1+r}W_t+\frac{r}{r-g}y_t$$

L'influence d'une hausse du taux d'intérêt sur la consommation est ambiguë (effet de substitution qui conduit à reporter la consommation et effet revenu correspond à l'influence du taux d'intérêt sur le revenu permanent). On peut remarquer que pour des ménages débiteurs $(W_t<0)$, la hausse des taux d'intérêt a un impact négatif sur la consommation.

Dans ce modèle sans incertain, l'influence d'une hausse du taux d'intérêt sur le niveau de la consommation dépend notamment de l'écart entre le taux de croissance du revenu et le taux d'intérêt réel. Si le taux de croissance est plus élevé que le taux d'intérêt réel, le consommateur a intérêt à s'endetter en début de période, endettement qu'il remboursera plus tard par un effort d'épargne mais aussi grâce à la croissance de son revenu.

**Exercice 3** (modèle « certainty equivalent »)

Montrer que si la fonction d'utilité est quadratique et que $\boldsymbol{b}(1+r)=1$, la consommation est répartie également entre chaque période.

Le consommateur a un comportement d'optimisation intertemporelle. Le taux d'intérêt réel est supposé constant. L'horizon de vie du consommateur est supposé infini.

[4] Pour éviter les gaspillages de revenu et une réduction de son bien-être, le consommateur a intérêt à une répartition égale.

# II/ Le modèle canonique de Hall

## II.1/ La résolution du modèle canonique

Le consommateur rationnel planifie sa consommation en $t$ compte tenu de l'information disponible, du revenu qu'il peut anticiper.

Le consommateur résout le programme d'optimisation intertemporelle suivant :

$$Max \underset{t}{E} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i u(c_{t+i})$$

$$\text{sc.} \begin{cases} W_{t+1+i} = (1+r)\left(W_{t+i} + y_{t+i} - c_{t+i}\right) \\ \lim\limits_{i\to\infty} \underset{t}{E} \dfrac{W_{t+i}}{(1+r)^i} = 0 \end{cases}$$

La variable $y_t$ est le revenu du consommateur hors charges et revenus d'intérêt. La seconde condition exprime le fait que les ménages ne peuvent pas s'endetter indéfiniment.

**Propriété 1 :** sous l’hypothèse que la valeur actualisée de l’endettement ou de l’actif détenu est nulle à l’horizon infini et sous l’hypothèse de marchés financiers parfaits, le patrimoine détenu à la date $t$ est égal à la désépargne future anticipée actualisée, c’est-à-dire :

$$W_t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\underset{t}{E}\left[c_{t+i} - y_{t+i}\right]}{(1+r)^i}$$

*preuve* :
En sommant les équations de transition sur la richesse entre les dates $t$ et $t+i$, on obtient :

$$\frac{W_{t+j+1}}{(1+r)^j} = (1+r)W_t + (1+r)\sum_{i=0}^{j} \frac{c_{t+i} - y_{t+i}}{(1+r)^i}$$

Cette contrainte d’égalité, qui est vérifiée ex post, est également prise en compte par les agents dans la formation de leur anticipation, soit :

$$\underset{t}{E} \frac{W_{t+j+1}}{(1+r)^j} = (1+r)W_t + (1+r)\sum_{i=0}^{j} \frac{\underset{t}{E}\left[c_{t+i} - y_{t+i}\right]}{(1+r)^i}$$

D’après la condition de transversalité, on obtient donc lorsque $j$ tend vers l’infini :

$$W_t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\underset{t}{E}\left[y_{t+i} - c_{t+i}\right]}{(1+r)^i}$$

Le lagrangien du comportement de maximisation intertemporelle s’écrit :

$$\underset{c_{t+i}, W_{t+i+1}}{Max} \underset{t}{E} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{\beta^i u(c_{t+i}) + \lambda_i \left[W_{t+i+1} - (1+r)(W_{t+i} - y_{t+i} + c_{t+i})\right]\right\}$$

Soient les conditions de premier ordre suivantes :

$$\begin{cases} / c_{t+i} : \beta^i \underset{t}{E} u'(c_{t+i}) = -\lambda_i \\ / W_{t+i+1} : \lambda_i - (1+r)\lambda_{i+1} = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \beta^i \underset{t}{E} u'(c_{t+i}) = (1+r)\beta^{i+1} \underset{t}{E} u'(c_{t+i+1})$$

En particulier, pour $i=0$, on obtient l'équation d'Euler [5]:

$$u^{'}(c_t) = (1+r)\beta \underset{t}{E} u^{'}(c_{t+1})$$

On peut également résoudre ce problème de maximisation intertemporelle par programmation dynamique et pour différentes variables de contrôle (cf. annexe 2).

**Exercice 4** : résoudre le programme d'optimisation intertemporelle par programmation dynamique en temps discret.

- en considérant le stock d'épargne comme variable de contrôle : $u_t = W_t + y_t - c_t$
- en considérant le flux d'épargne comme variable de contrôle : $u_t = y_t - c_t$

**Exercice 5** : en supposant que le taux d'intérêt réel est lui-même stochastique, montrer que les conditions d'Euler s'écrivent :

$$u^{'}(c_{t+i}) = \beta \underset{t}{E}(1+r_{t+1})u^{'}(c_{t+i+1})$$

### II.2/ La substitution intertemporelle

La substitution intertemporelle désigne les conséque,nces d'une hausse anticipée du taux d'intérêt sur le profil de la consommation. Le cadre du modèle canonique PIH/LCH permet d'établir que le report de la consommation sur la période future face à une hausse anticipée du taux d'intérêt (et donc l'accroissement contemporain de l'épargne) est d'autant plus important que l'aversion pour le risque relative est faible. Pour établir ces résultats, on suppose que l'aversion relative par rapport au risque du consommateur est constante (hypothèse d'une fonction d'utilité isoélastique ou CCRA), soit :

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\delta}}{1-\delta} \qquad \text{d'où } -\frac{c_t u^{''}}{u^{'}} = \delta$$

Les conditions d'optimalité de premier ordre sont (en supposant le taux d'intérêt futur incertain, cf. exercice 2) :

$$\underset{t}{E}(1+r_{t+1})\beta\frac{u^{'}(c_{t+1})}{u^{'}(c_t)} = \underset{t}{E}(1+r_{t+1})\beta\frac{c_{t+1}^{-\delta}}{c_t^{-\delta}} = 1$$

soit approximativement :

$$\underset{t}{E}\exp[r_{t+1} - \rho - \delta\Delta Lnc_{t+1}] = 1$$

si on suppose que les variables $r_{t+1}, \rho, \Delta Lnc_t$ suivent une loi normale, et en notant $\omega_t^2 = \underset{t}{Var}\left(\delta^{-1}(r_{t+1} - \rho) - \Delta Lnc_{t+1}\right)$, on a de plus :

$$\underset{t}{E}\exp[r_{t+1} - \rho - \delta\Delta Lnc_{t+1}] = \exp\left[\underset{t}{E}(r_{t+1} - \rho - \delta\Delta Lnc_{t+1}) + \delta^2\frac{\omega_t^2}{2}\right]$$

d'où[6] :

---

[5] On suppose que les aléas de la période $t$ sont connus en $t$.

[6] Si $Log(p)$ suit une loi log-normale $N(\mu, \sigma^2)$, alors on a : $Ep = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$

$$\underset{t}{E}\,\Delta Ln(c_{t+1}) = \boldsymbol{d}^{-1}\left(\underset{t}{E}(r_{t+1}) - \boldsymbol{r}\right) + \boldsymbol{d}\frac{\boldsymbol{w}_t^2}{2}$$

Le profil de la consommation apparaît donc indépendant du profil du revenu. Il dépend uniquement du taux d'intérêt $r_{t+1}$, de la préférence pour le présent $\boldsymbol{r}$, de l'aversion par rapport au risque $\boldsymbol{d}$ et de la volatilité de la consommation $\boldsymbol{w}_t^2$. De façon générale, un consommateur reportera d'autant plus sa consommation que la volatilité de la consommation est importante (épargne de précaution). De plus :

- si $\underset{t}{E}(r_{t+1}) > \boldsymbol{r}$, la consommation croît. Un taux réel anticipé élevé conduit les agents à reporter leur consommation. Ce report est d'autant plus important que l'aversion relative par rapport au risque est elle-même élevée.
- si $\underset{t}{E}(r_{t+1}) = \boldsymbol{r}$, la consommation croît à un rythme constant $\boldsymbol{d}\frac{\boldsymbol{w}_t^2}{2}$.
- si $\underset{t}{E}(r_{t+1}) < \boldsymbol{r}$, la consommation décroît. Sa forte préférence pour le présent conduit le consommateur, impatient, à diminuer sa consommation future au profit de la consommation présente.

## III/ Peut-on prévoir les variations de la consommation ?

### III.1/ La consommation comme marche aléatoire

Sous les hypothèses restrictives de fonction d'utilité quadratique et $r = \boldsymbol{r}$, on peut déduire trois caractéristiques du modèle.

**Proposition 2** : si $r = \boldsymbol{r}$ et si la fonction d'utilité est quadratique, la consommation suit une marche aléatoire.

**Preuve** :
On a $\boldsymbol{b}(1+r) = 1$, soit $\underset{t}{E}u'(c_{t+1}) = u'(c_t)$. De plus, si la fonction d'utilité est quadratique, alors la fonction d'utilité marginale est linéaire et on a donc :

$$\underset{t}{E}\,c_{t+1} = c_t$$

La consommation suit une marche aléatoire. Les variations de la consommation ne sont pas prévisibles. De l'égalité entre le patrimoine et la désépargne future actualisée, on déduit donc :

$$c_t = \frac{r}{1+r}W_t + \frac{r}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\underset{t}{E}\,y_{t+i}}{(1+r)^i}$$

Le consommateur consomme ses revenus du patrimoine $\frac{r}{1+r}W_t$ et son revenu permanent issu du travail défini ici par $\frac{r}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\underset{t}{E}\,y_{t+i}}{(1+r)^i}$. L'imprévisibilité de l'évolution de la consommation correspond au fait que le ménage intègre parfaitement dans ses décisions toutes les informations disponibles pour prévoir son revenu futur et que seules des révisions de ces anticipations peuvent le conduire à une révision de sa consommation sur la période future. La différence avec les modélisations macroéconomiques habituelles de la consommation est nette : les prévisions futures du revenu déterminent la consommation.

**Proposition 3** : si $r = \rho$ et si la fonction d'utilité est quadratique, la variation de la consommation est égale à la somme actualisée des révisions de revenus anticipés :

$$(1-L)c_{t+1} = e_{t+1} = \frac{r}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(E_{t+1}-E_t)y_{t+i+1}}{(1+r)^i}$$

En effet,

$$c_{t+1} = \frac{r}{1+r}W_{t+1} + \frac{r}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{E_{t+1}y_{t+1+i}}{(1+r)^i} \Rightarrow c_{t+1} = r(W_t + y_t - c_t) + \frac{r}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{E_{t+1}y_{t+1+i}}{(1+r)^i}$$

De plus :

$$(1+r)c_t = rW_t + r\sum_{i=0}^{\infty}\frac{E_t y_{t+i}}{(1+r)^i}$$

D'où :

$$(1-L)c_{t+1} = ry_t + \frac{r}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{E_{t+1}y_{t+1+i}}{(1+r)^i} - r\sum_{i=0}^{\infty}\frac{E_t y_{t+i}}{(1+r)^i} = \frac{r}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{E_{t+1}y_{t+1+i}}{(1+r)^i} - \frac{r}{1+r}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{E_t y_{t+i}}{(1+r)^{i-1}}$$

D'où le résultat annoncé. Si la consommation n'est pas prévisible (marche aléatoire), c'est que le consommateur révise son plan de consommation seulement lorsqu'une une information nouvelle est disponible.

### III.2 / L'épargne comme prédicteur des revenus futurs

En fait, Campbell (1987) a montré comment une décision de consommation du type $c_t = \frac{r}{1+r}W_t + \frac{r}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{E_t y_{t+i}}{(1+r)^i}$ impliquait l'existence d'une relation de cointégration entre la consommation et le revenu, en fait la stationnarité de l'épargne. Cette épargne constitue alors un bon prédicteur des revenus futurs. On peut ainsi établir la proposition suivante.

**Proposition 4** : si $r = \rho$ et si la fonction d'utilité est quadratique, l'épargne $s_t = y_t + \frac{r}{1+r}W_t - c_t$ est égale à la somme actualisée des variations anticipées d'anticpations de revenu entre la date $t$ et la date $t+1$ :

$$s_t = -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{E_t(1-L)y_{t+i}}{(1+r)^i}$$

En effet :

$$
\begin{aligned}
s_t &= \frac{r}{1+r}W_t + y_t - c_t = y_t - \frac{r}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\underset{t}{E}\, y_{t+i}}{(1+r)^i} \\
&= \mathrm{y}_{\mathrm{t}} - \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\underset{t}{E}\, y_{t+i}}{(1+r)^i} + \frac{1}{1+r}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\underset{t}{E}\, y_{t+i}}{(1+r)^i} \\
&= -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\underset{t}{E}\, y_{t+i}}{(1+r)^i} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\underset{t}{E}\, y_{t+i-1}}{(1+r)^i} \\
&= -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\underset{t}{E}(1-L)y_{t+i}}{(1+r)^i}
\end{aligned}
$$

Le consommateur épargne en prévision des mauvais jours. Cette épargne constitue un résumé d'information sur les variations de revenu anticipées par le consommateur. Cette troisième propriété permet de tester le modèle de revenu permanent (dans un cadre intertemporel) de façon plus systématique :

- un test de l'hypothèse du revenu permanent est alors de vérifier la causalité, au sens de Granger, de l'épargne vers le revenu.
- de plus, si le revenu est supposé stationnaire en différence, alors l'épargne est également stationnaire. En termes statistiques, la consommation et le revenu sont cointégrés.
- En pratique, on étudie l'hypothèse de revenu permanent dans un cadre stochastique devrait conduire à la non significativité de la relation de cointégration dans le modèle autorégressif de la consommation et de sa significativité pour l'équation de revenu.

### III.3/ L'excès de sensibilité de la consommation

Le modèle de marche aléatoire de la consommation peut être décrit à partir de deux équations : la première décrit l'évolution du revenu par un processus autorégressif et la seconde la consommation comme une marche aléatoire avec une dérive $\gamma$ et une innovation proportionnelle à celle du revenu :

$$
\begin{cases}
\alpha(L)y_t = \varepsilon_t \\
\Delta c_t = \gamma + \theta\varepsilon_t
\end{cases}
$$

Les conclusions du modèle de marche aléatoire ont été contestées, notamment parce que l'historique du revenu permet d'améliorer les prévisions de consommation. Ainsi, cette hypothèse d'excès de sensibilité de la consommation (« excess sensitivity ») peut être testée dans le cadre proposé initialement par Flavin (1981) :

$$
\begin{cases}
y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t \\
\Delta c_t = \gamma + \beta_1 \Delta y_t + \beta_2 \Delta y_{t-1} + \theta\varepsilon_t + u_t
\end{cases}
$$

On réécrit le modèle sous sa forme réduite de façon à distinguer dans la dynamique de la consommation la partie qui pourrait être expliquée par l'historique du revenu $y_{t-1}, y_{t-2}$ et celle qui correspond à l'erreur d'anticipation sur le revenu courant, $\left(\underset{t}{E} - \underset{t-1}{E}\right)y_t = \varepsilon_t$ .

$$
\begin{cases}
\Delta c_t = (\gamma + \alpha_0\beta_1) + \left[\beta_2 + \beta_1(\alpha_1 - 1)\right]_1 (1-L)y_{t-1} + \left(\beta_1\alpha_2 - \beta_2\right)_2 y_{t-2} + \theta\varepsilon_t + u_t \\
y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t
\end{cases}
$$

Les équations réduites sont estimées par la méthode FIML . L'équation réduite sur le revenu permet d'identifier les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \sigma_e^2$. Concernant l'équation réduite sur la consommation, un problème d'identification apparaît entre les coefficients $\theta$ et $\sigma_u^2$. L'hypothèse nulle de marche aléatoire est donnée par $H0 : \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_2 = 0$. Les résultats empiriques conduisent généralement au rejet de l'hypothèse nulle. Ce rejet peut d'abord conduire à une remise en cause du modèle de Hall. En fait, dans des travaux antérieurs à ceux de Campbell, Davidson, Hendry, Srba et Yeo (1978) avaient proposé une approche similaire. Ils cherchaient à comprendre comment une équation structurelle de consommation pouvait permettre d'améliorer le pouvoir prédictif d'une équation univariée de consommation. En fait, ils ont mis en évidence l'avantage des spécifications de type de type ECM ("error correction model"), c'est-à-dire la significativité de l'écart entre consommation et revenu dans la dynamique de la consommation.

Le modèle d'optimisation intertemporelle suppose en effet que le consommateur a accès aux marchés financiers et peut emprunter dès aujourd'hui sur la garantie de ses revenus futurs. Si le sytème bancaire n'accepte de prêter que contre des revenus effectifs, il est difficile d'augmenter sa consommation aujourd'hui en anticipation d'une hausse des revenus futurs. Ce point est approfondi dans les sections suivantes. Nous présentons maintenant les critiques méthodologiques qui ont pu être avancées sur les tests de Flavin en défense de l'hypothèse de marche aléatoire :

- le revenu est non stationnaire et sa dynamique doit être estimée sous forme différenciée ;
- la périodicité des données observées est supérieure à la périodicité de la décision. Supposons par exemple que l'observation est annuelle (indice *t*) et que la période de décision est semestrielle (indice τ) :

| t | | t+1 | |
|---|---|---|---|
| τ-1 | τ | τ+1 | τ+2 |

On a alors :

$$\begin{cases} c_t = c_{t+1} + c_t \\ c_{t-1} = c_{t-1} + c_{t-2} \end{cases} \Rightarrow (1-L)c_t = c_{t+1} + c_t - c_{t-1} - c_{t-2} = (1-L)c_{t+1} + 2(1-L)c_t + (1-L)c_{t-1}$$ De

De même, on a :

$$(1-L)y_{t-1} = (1-L)y_{t-1} + 2(1-L)y_{t-2} + (1-L)y_{t-3}$$

Même si les décisions conduisent à l'indépendance des variations présentes de la consommation $(1-L)c_t$ par rapport à celles passées du revenu $(1-L)y_{t-1}$, une corrélation sera mesurée car les variations observées comportent des termes communs, par exemple l'innovation commune entre $(1-L)c_{t-1}$ et $(1-L)y_{t-1}$.

### III.4/ L'évolution de la consommation est-elle trop lisse ?

Campbell et Deaton (1989) ont testé les conséquences théoriques du modèle de Hall sur la variance des variations de la consommation, àpartir d'une modélisation ARIMA du revenu et de la relation téhorique entre la variation de la consommation et les révision d'anticipations de revenu,
On propose d'abord une modélisation ARIMA du revenu à partir de laquelle les révisions de revenu sont calculées. On peut alors calculer la variation théorique de la consommation ainsi que sa variance. Le modèle ARIMA retenu est le suivant :

$$(1-L)y_t = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}(1-L)y_{t-1} + \boldsymbol{e}_t$$

On suppose que les agents forment leurs anticipations à partir de ce modèle ARIMA : l'innovation économétrique et l'erreur d'anticipation des agents sont identiques. Ce modèle économétrique du revenu des ménages peut s'écrire sous sa forme MA infinie :

$$(1-L)y_t = \frac{\alpha}{1-\beta} + \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \varepsilon_{t-i}$$

Entre $t$ et $t+1$ , l'information nouvelle est $\varepsilon_{t+1}$, qui influence donc $(1-L)y_{t+i}$ pour un montant $\beta^{i-1}\varepsilon_{t+1}$. On a donc :

$$\left(\underset{t+1}{E}-\underset{t}{E}\right)(1-L)y_{t+j} = \beta^{i-1}\varepsilon_{t+1}$$

comme $y_{t+i} = y_t + \sum_{j=1}^{i}(1-L)y_{t+i}$ , on a donc les révisions d'anticipation de revenu suivantes :

$$\left(\underset{t+1}{E}-\underset{t}{E}\right)y_{t+i} = \sum_{j=1}^{i}\beta^{j-1}\varepsilon_{t+1} = \frac{1-\beta^i}{1-\beta}\varepsilon_{t+1}$$

Comme la consommation des ménages est égale aux révisions actualisées du revenu, on déduit :

$$(1-L)c_{t+1} = \frac{1+r}{1+r-\beta}\varepsilon_{t+1}$$

Théoriquement, le modèle de Hall doit donc conduire à la variance suivante de la différence première de la consommation :

$$\mathrm{var}\left((1-L)c_t\right) = \left(\frac{1+r}{1+r-\beta}\right)^2 \sigma_\varepsilon^2$$

A partir des valeurs estimées pour le revenu et pour certains paramètres vraisemblables de r et β, on calcule une variance "théorique". Celle-ci apparaît trop élevée par rapport à la variance empirique constatée. En réalité, la consommation réagit moins à une erreur d'anticipation du revenu que ne le prédit le modèle de Hall.

## IV/ Epargne de précaution et modèle stocks-tampon

L'épargne de précaution traduit le comportement d'un consommateur face à l'incertitude (Skinner 1988, Caballero 1990). Afin d'assurer un certain niveau d'utilité espérée pour l'avenir, le consommateur peut être amené à réduire sa consommation aujourd'hui et à constituer une épargne de précaution.

### IV.1/ Vers des fondements microéconomiques à l'épargne de précaution ?

L'épargne de précaution est définie comme une épargne d'assurance contre les contingences futures, bonnes ou mauvaises. Pour étudier la constitution de cette épargne de précaution, on définit l'incertitude sur la consommation future comme un élargissement de la distribution de la consommation future sans modification de son espérance, à la hausse comme à la baisse. Essayons de comparer deux situations d'équilibre, la situation A et la situation B, plus incertaine :

- En A, on a : $c = \bar{c} + \varepsilon$ avec $E\varepsilon^2 = \sigma^2$
- En B, on a : $c = \bar{c} + \tilde{\varepsilon}$ avec $E\tilde{\varepsilon}^2 = \tilde{\sigma}^2 > \sigma^2$

De plus, on peut approximer l'utilité marginale au second ordre :

- En A, $u'(c) = u'(\bar{c}) + \varepsilon u''(\bar{c}) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 u'''(\bar{c}) \Rightarrow \underset{A}{E}u'(c) = u'(\bar{c}) + \frac{1}{2}\sigma^2 u'''(\bar{c})$
- En B, $u'(c) = u'(\bar{c}) + \varepsilon u''(\bar{c}) + \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}^2 u'''(\bar{c}) \Rightarrow \underset{B}{E}u'(c) = u'(\bar{c}) + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 u'''(\bar{c})$

Comparer l'espérance de l'utilité marginale entre deux situations plus ou moins incertaines revient donc à comparer $\sigma^2 u'''(\bar{c})$ et $\tilde{\sigma}^2 u'''(\bar{c})$. On a donc les résultats suivants :

- si l'utilité marginale est convexe, son espérance s'accroît avec l'incertitude
- si l'utilité marginale est concave, son espérance décroît avec l'incertitude

On peut donc, en parallèle avec le concept d'aversion au risque, définir un coefficient de prudence, relative ou absolue (Kimball 1990).

$$\text{coefficient de prudence absolue} = -\frac{u'''}{u''}$$

$$\text{coefficient de prudence relative} = -\frac{cu'''}{u''}$$

Quelles sont les conséquences de l'incertitude sur la consommation présente à l'équilibre ? Une hausse de l'incertitude sur la consommation future accroît l'espérance de l'utilité marginale de la consommation future si l'utilité marginale est convexe. L'unité marginale de consommation est davantage valorisée à l'avenir. Or, d'après les équations d'Euler, on a :

$$u'(c_t) = \beta(1+r)\underset{t}{E}\, u'(c_{t+1})$$

Du fait de la concavité de la fonction d'utilité, la consommation présente $c_t$ diminue. La hausse de l'incertitude conduit le consommateur à valoriser davantage l'unité supplémentaire de consommation future et donc à réduire sa consommation présente. Cette épargne peut être comprise comme une épargne de précaution, face à l'élargissement des futurs possibles, bons ou mauvais. Cette épargne de précaution se distingue donc de l'épargne qui a été mise précédemment en évidence dans le cadre du modèle de Hall : l'épargne est alors transitoire et constitue en fait la réponse du consommateur à des anticipations à la baisse de son revenu, pour maintenir son niveau de consommation. Remarquons notamment que si la fonction d'utilité est quadratique, on a alors :

$$\underset{t}{E}u'(c_t) = u'(\bar{c})$$

Une augmentation de l'incertitude, telle que nous l'avons déjà définie, n'a donc aucune influence sur la consommation et l'épargne du consommateur.

Formellement, l'impact de l'incertitude sur les variations de la consommation future peut être dérivé pour une fonction d'utilité générale à partir des équations d'Euler par approximation de Taylor au deuxième ordre :

$$u'(c_{t+1}) = u'(c_t) + (c_{t+1} - c_t)u''(c_t) + \frac{1}{2}(c_{t+1} - c_t)^2 u'''(c_t)$$

D'où, en appliquant ce développement aux conditions d'Euler :

$$\underset{t}{E}\left[1 - \frac{(c_{t+1} - c_t)}{c_t} car + \frac{1}{2} cpr \left(\frac{c_{t+1} - c_t}{c_t}\right)^2 car\right] = \frac{1+\rho}{1+r}$$

D'où :

$$\underset{t}{E}\left(\frac{c_{t+1} - c_t}{c_t}\right) = \frac{r-\rho}{1+r}(car)^{-1} + \frac{1}{2} cpr\, \underset{t}{E}\left(\frac{c_{t+1} - c_t}{c_t}\right)^2$$

**Exercice 6** : calculer le coefficient de prudence relative correspondant à une fonction d'utilité de type CCRA.

**Exercice 7** (Blanchard et Fisher 1989) : La fonction d'utilité est $u(c) = -\frac{1}{\alpha}\exp(-\alpha c)$.

$$\underset{0}{Max\,E} \sum_{t=0}^{T-1} \left(-\frac{1}{\alpha}\right) \exp(-\alpha c_t)$$

On suppose par ailleurs que la dynamique du revenu est caractérisée par : $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ avec $E\varepsilon_t^2 = \sigma^2$. De plus, $r = 0$.

- Commenter la fonction d'utilité ;
- Résoudre le programme du consommateur en univers certain : $\sigma^2 = 0$ ;
- Résoudre le programme du consommateur en univers incertain : $\sigma^2 > 0$ .

### IV.2/ Une application sur données de panel

Dynan (1993) a estimé l'équation d'Euler développé au deuxième ordre sur une enquête auprès des ménages américains (Consumer Expenditure Survey, 1985, 5000 ménages). Les biens durables ont été exclus du champ de la consommation estimée du fait de la séparabilité intertemporelle de la fonction d'utilité globale. Celle-ci suppose en effet que la consommation sur la période $t$ n'affecte pas la consommation d'une autre période, hypothèse peut réaliste pour les biens durables dont la consommation s'étend sur plusieurs périodes. Cette enquête porte sur les variables de revenu et de consommation ainsi que les variables démographiques. Outre le niveau annuel des variables de flux, l'enquête porte également sur leur taux de croissance trimestriel. L'équation estimée est donc la suivante :

$$\frac{1}{4}\sum_{t=1}^{4} GC_{i,t} + \mu_i = (car)^{-1}\left(\frac{r-\rho}{1+r}\right) + \frac{cpr}{2}\left[\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} GC_{i,t}\right]^2 + v_i + \eta_i$$

$GC_{i,t}$ est le taux de croissance de la consommation du ménage *i*. Les termes $\mu_i$ et $v_i$ sont les termes stochastiques correspondant aux opérateurs espérance, le terme stochastique $\eta_i$ a été ajouté pour tenir compte des modifications de goût.

### IV.3/ La simulation d'un modèle microéconomique de base

#### IV.3.a/ La simulation du modèle de base

Carrol (1992, 1994 et 1997) a étudié la consommation des ménages à partir d'un modèle paramétré sur données d'enquêtes auprès des ménages. Il s'agit d'un modèle microéconomique à horizon fini. Le cas d'horizon infini est alors traité comme le cas limite du cas à horizon fini $T$.

$$\underset{t}{Max\,E} \sum_{i=t}^{T-t} \beta^i u(c_{t+i})$$

$$\text{sc. } \begin{cases} W_{t+1+i} = (1+r)(W_{t+i} + y_{t+i} - c_{t+i}) \\ y_{t+i} = p_{t+i} v_{t+i} \\ p_{t+i} = g p_{t+i-1} n_{t+i} \end{cases}$$

Le revenu est défini par deux composantes (multiplicatives) : l'une, $v_t$, est stationnaire et log-normale ; l'autre, $p_t$, est intégrée d'ordre 1 et son logarithme suit une marche aléatoire avec dérive $g$ :

$$\Delta Ln(p_t) = Ln(g) + Ln(n_t)$$

En définissant la variable d'état $x_t = \dfrac{W_t + y_t}{p_t}$, on obtient comme équation d'Euler (en supposant l'homogénéité de degré un de la fonction d'utilité) :

$$u'(c_t) = (1+r)\beta \underset{t}{E}\, u'\left(R(x_t - c_t) + v_{t+1} g n_{t+1}\right)$$

On obtient donc la valeur optimale de la consommation $c_t = c_t(x_t)$ par algorithme numérique car il n'existe pas de solution analytique simple même si l'on retient une fonction d'utilité de type Constant Relative Risk Aversion (CCRA) . Bien entendu, cette résolution numérique n'est possible que si les paramètres ont été estimés ou précisés. Dans sa résolution de base, l'auteur procède comme suit :

- estimation des distributions des chocs de revenus permanent et transitoire. Celles-ci sont donc paramétrées à partir de données d'enquêtes, sous l'hypothèse de log-normalité des chocs respectifs et d'une probabilité p d'avoir un revenu nul (cf. Carrol 1992). Pour des valeurs des paramètres $p$, $\sigma_{\ln V}$ et $\sigma_{\ln P}$[7] ;
- une valeur a priori du coefficient d'aversion relative par rapport au risque (10%) ;
- une dérive du revenu permanent calibrée à 2 % ;
- un coefficient d'aversion $\delta$ par rapport au risque de 2 % .

L'auteur recourt alors à des méthodes numériques de résolution arrière :

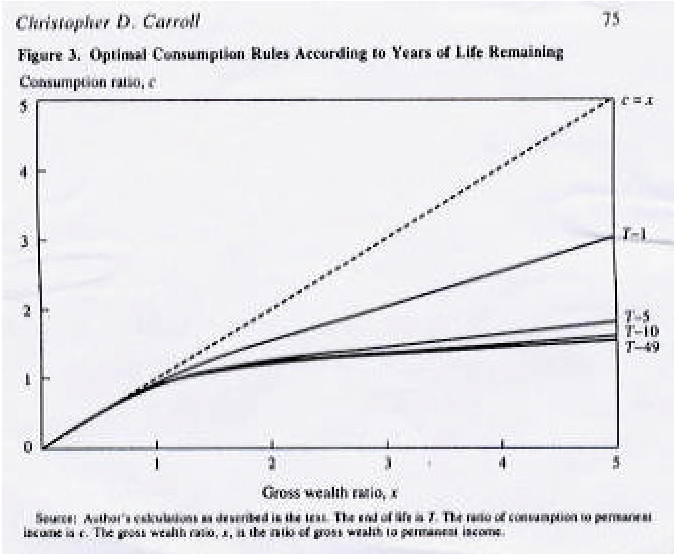
- en *T*, tous les actifs sont consommés car ils n'ont pas d'utilité en eux-mêmes : $c_T(x_T) = x_T$

- en *T-1*, on applique un algorithme pour résoudre l'équation d'Euler $u'(c_t) = (1+r)\beta \underset{t}{E}\, u'\left(R(x_t - c_t) + v_{t+1} g n_{t+1}\right)$ pour *m* valeurs de $x_{T-1} = (x_1,...,x_m)$. La fonction $c_{T-1}(x_{T-1})$ est alors obtenue par interpolation linéaire entre ces $m$ valeurs. Bien entendu, la résolution numérique suppose comme préalable l'estimation des distributions des chocs de revenus permanent et transitoire. Celles-ci sont donc paramétrées à partir de données d'enquêtes, sous l'hypothèse de log-normalité des aléas des composantes permanentes et transitoires et aussi d'une probabilité $p$ d'avoir un revenu nul. Le cas limite $c(x_t) = \lim_{t\to\infty} c_t(x_t)$ correspond au cas d'horizon infini. Pour l'exemple retenu, le cas d'horizon fini converge relativement rapidement vers une situation d'horizon infini (cf. figure 3).

---

7 $\sigma_{\ln V}$ (respectivement $\sigma_{\ln P}$) est l'écart type de la loi normale du logarithme de la composante transitoire (respectivement permanente).

**Figure 3** : Les choix de consommation et durée de vie




Source : *Carroll C.D (1992)* : "The Buffer-Stock Theory of Saving : Some Macroeconomic Evidence" Brookings Papers on Economic Activity 2:1992

On constate que l'horizon de la planification *T-i* influence peu la règle de consommation : cette règle converge tant que le consommateur se trouve au moins cinq ans avant la date *T*.

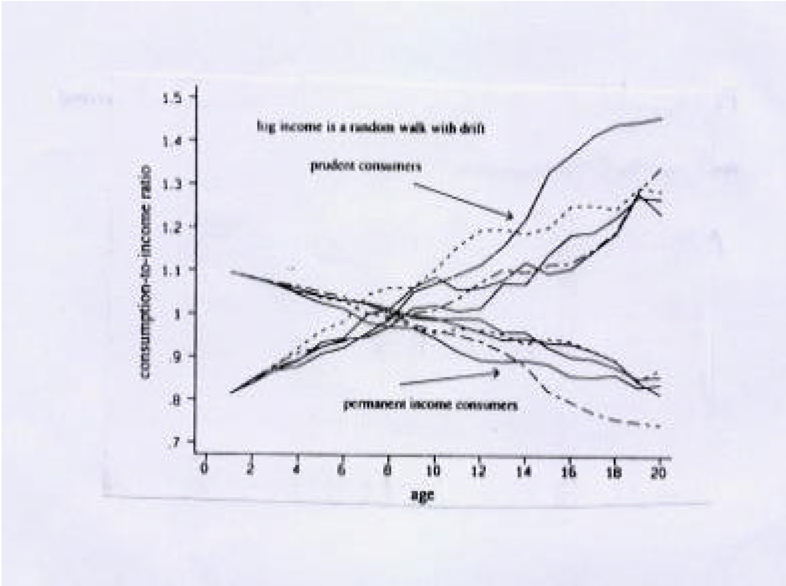
Deaton (1991) présente la simulation de ce modèle pour deux types de consommateurs : les premiers sont à fonction d'utilité quadratique, c'est-à-dire de type «revenus permanents » ; les seconds sont à fonction d'utilité CCRA $(\delta = 3)$, c'est-à-dire de type « prudents ». Les hypothèses sur les paramètres sont les suivantes : $\beta(1+r)=1; r = \rho = .05, T = 20$ . De plus, le processus suivi par le revenu est défini par :

$$Ln(y_{t+1}) = Ln(y_t) + \varepsilon_t \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{E}\varepsilon_t^2 = \sigma^2$$

De par ces hypothèses, le revenu a donc tendance à croître[8]. Sur la figure 4, on représente la dynamique du ratio consommation sur revenu. Ce ratio a tendance à décroître dans le cas de consommateur « revenu permanent » : la consommation fluctue autour d'un niveau constant mais le revenu a tendance à croître. En fait, le consommateur a un taux d'épargne décroissant en fonction du revenu car il emprunte lorsqu'il a un revenu faible, c'est-à-dire en début de période. Au contraire, le consommateur prudent épargne lorsqu'il est jeune car c'est alors que l'incertitude est importante pour lui. Son taux d'épargne décroît avec l'âge et le revenu.

8 $\underset{t}{E}\, y_t / y_{t+k} = \exp\left(k\sigma^2/2\right)$

**Figure 4** : Consommateur à utilité quadratique ou CCRA.




Source : « Understanding consumption » Deaton (1991)

Cependant, l 'existence d'une solution en horizon infini, c'est-à-dire la convergence des règles successives de consommation $c_t(x_t), c_{t-1}(x_{t-1}),$ etc n'est pas sytématique et est conditionnée par certaines valeurs sur les paramètres.

### IV.3.b/ L' impatience du consommateur : une condition nécessaire à l'équilibre

La condition suffisante pour assurer la convergence du modèle est :

$$\boldsymbol{d}^{-1}(r-\boldsymbol{r}) < g - \boldsymbol{d}/2\, \boldsymbol{s}^2_{LnN} = g'$$

Une démonstration se trouve dans Carrol (1997). Nous en avançons une explication heuristique.

- *la définition de l'impatience*

L'impatience du consommateur peut être définie comme suit : si son revenu était certain, le consommateur impatient emprunterait aujourd'hui contre ses revenus futurs pour consommer aujourd'hui. Le consommateur impatient emprunte aujourd'hui pour consommer plus que son revenu courant. On a : $\boldsymbol{r} > r$ .

- *une condition nécessaire à l'équilibre : l'impatience du consommateur*

Si le revenu du consommateur était certain, l'équation d'Euler serait :

$$u'(C_t) = (1+r)\boldsymbol{b}u'(C_{t+1})$$

soit

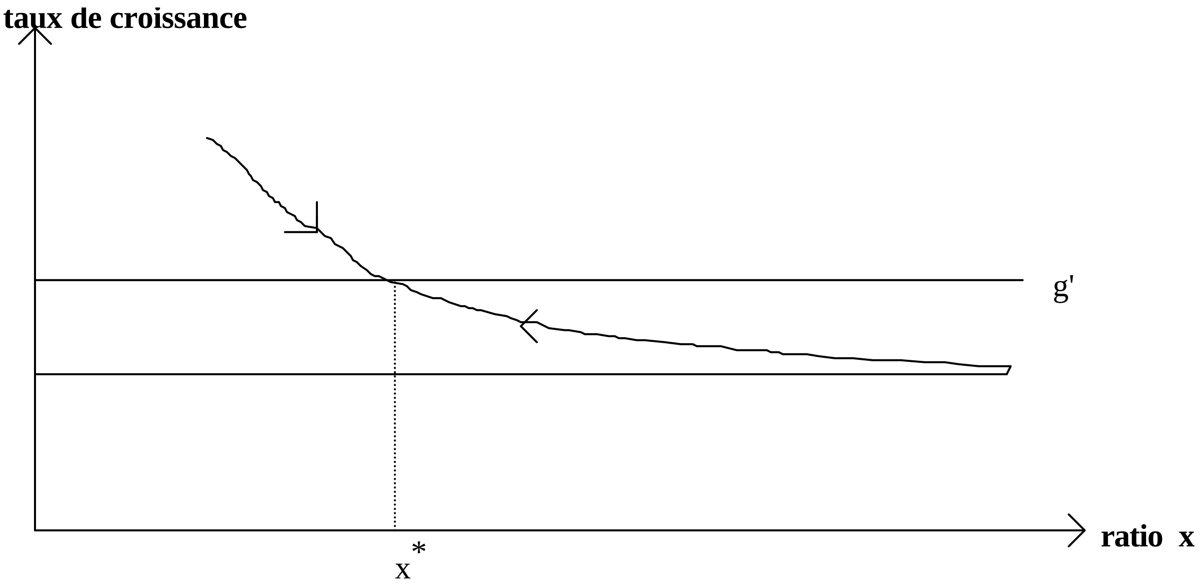
$$C_t^{-d} = \boldsymbol{b}(1+r)C_{t+1}^{-d}$$

En passant aux logarithmes, on obtient :

$$Ln(C_{t+1}) - \ln(C_t) \approx \boldsymbol{d}^{-1}(r-\boldsymbol{r})$$

Si le revenu était certain, le taux de croissance de la consommation serait donc égal à $(r-\rho)\delta^{-1}$. La consommation du consommateur impatient est plus élevée aujourd'hui que son revenu courant. Afin de respecter la contrainte intertemporelle de revenu, la consommation doit croître à un rythme moindre que le revenu, soit $\delta^{-1}(r-\rho) < g - \delta\sigma^{2}_{\ln N}/2$. En fait, il s'agit là d'une condition nécessaire à l'équilibre.

**Figure 5** : La croissance anticipée de la consommation




D'après Carroll C.D (1992, 1997)

- *Pourquoi parle-t-on de modèle stock-tampon?*

D'après la solution représentée sur la figure 3, si le ratio $x$ est élevé, le taux de croissance de la consommation en univers incertain tend vers le taux de croissance de la consommation en univers certain. De même, si le ratio x est faible, la consommation croît plus rapidement que le revenu. Or, on a pu établir précédemment que :

$$E_t(1-L)\ln(c_{t+1}) \approx \delta^{-1}(r-\rho) + \frac{1}{2}\delta E_t \operatorname{var}(1-L)\ln c_{t+1}$$

On en déduit donc que $E_t \operatorname{var}(1-L)\ln c_{t+1}$ est négativement corrélée à la richesse des agents : un agent dont la richesse est faible a peu de possibilité pour se protéger contre des chocs de revenu et sa consommation varie fortement. Deux propriétés de la figure 5 doivent être interprétées.

- *la courbe est de pente négative* :

La croissance de la consommation est donc élevée lorsque la richesse est faible car le niveau de la consommation présente est faible et l'épargne de précaution importante. En fait, Kimball (1990) a démontré que l'épargne de précaution (le flux de la période) décroît avec le stock de richesse, car le consommateur dispose alors d'un stock-tampon suffirait pour se protéger contre des chocs de revenu. Son niveau de consommation est alors élevé et son taux de croissance faible.

- *la convergence vers l'équilibre x** :

Au delà de x*, l'impatience du consommateur le pousse à accroître davantage sa consommation. En deçà, sa prudence le conduit à une épargne de précaution et donc à une réduire la croissance de sa consommation.

### IV.3.c/ La notion de stocks tampon

Caroll a étudié la sensibilité des résultats aux valeurs retenues pour différents paramètres : probabilité d'avoir un revenu nul, importance des chocs de revenu transitoire, des chocs de revenu permanent, variations des taux d'intérêt réel, aversion au risque. L'impact de ces variations est étudié sur le rapport de la richesse au revenu, $w^* = \frac{W}{p}$.

- forte sensibilité à la probabilité d'avoir un revenu nul

| $p$ | 0,1 | 0,5 | 1,0 |
|---|---|---|---|
| w* | 0,26 | 0,44 | 0,56 |

La probabilité d'avoir un revenu nul conduit l'individu à accroître sa richesse.

- faible sensibilité à l'écart-type des chocs transitoires

| $s_{\ln v}$ | 0 | 0,10 | 0,15 |
|---|---|---|---|
| w* | 0,42 | 0,44 | 0,46 |

L'importance des chocs transitoires de revenu influence peu la richesse de l'agent.

- faible sensibilité à l'écart-type des chocs permanents

| $s_{\ln N}$ | 0 | 0,10 | 0,15 |
|---|---|---|---|
| w* | 0,39 | 0,44 | 0,57 |

L'importance des chocs permanents de revenu influence la richesse de l'agent.

- faible sensibilité au taux d'intérêt réel $r$

| r | 0 | 20 | 4 |
|---|---|---|---|
| w* | 0,44 | 0,48 | 0,53 |

Une variation du taux d'intérêt réel a peu d'effet.

- forte sensibilité au taux de croissance du revenu permanent *g*

| g | 0 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|
| w* | 0,60 | 0,44 | 0,37 |

Plus le revenu permanent croît rapidement, plus la richesse est faible par rapport au revenu.

- coefficient d'aversion au risque

| $-c\frac{u''}{u'}$ | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|
| w* | 0,60 | 0,44 | 0,37 |

Plus l'aversion relative au risque est élevée, plus la richesse est faible par rapport au revenu.

## V/ Les contraintes de liquidité

### V.1/ Quelles conséquences sur la dynamique intertemporelle de la consommation ?

Un agent est contraint sur les marchés financiers lorsqu'il ne peut pas emprunter autant qu'il le souhaiterait au taux de marché. En pratique, on suppose souvent qu'une situation débitrice nette lui est interdite, c'est-à-dire que $W_{t+i} \geq 0$. Le programme de maximisation du consommateur est donc donné par :

$$Max\ \underset{t}{E} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i u(c_{t+i})$$

$$\text{sc.} \begin{cases} W_{t+1+i} = (1+r)(W_{t+i} + y_{t+i} - c_{t+i}) \\ W_{t+i+1} \geq 0 \end{cases}$$

Si on retient comme variable de contrôle le stock d'épargne $u_t = W_t + y_t - c_t$, l'équation de transition s'écrit $W_{t+i+1} = (1+r)u_{t+i}$ et l'équation de Bellman devient :

$$V(W_{t+i}) = \max_{u_{t+i}} \left\{ u(-u_{t+i} + W_{t+i} + y_{t+i}) + \beta \underset{t}{E} V(W_{t+i+1}) + \lambda_{t+i} W_{t+i+1} \right\}$$

Les conditions de premier ordre donne donc $(/\,u_{t+i})$ :

$$-u'(c_{t+i}) + \beta(1+r)\underset{t}{E} V'(W_{t+i+1}) + (1+r)\lambda_{t+i} = 0$$

Les conditions de Benveniste-Sheinkman donnent quant à elle $(/\,W_{t+i})$ :

$$V'(W_{t+i}) = (1+r)u'(c_{t+i})$$

D'où, pour *i=0* :

$$\beta(1+r)\underset{t}{E} u'(c_{t+1}) + (1+r)\lambda_t = u'(c_t)$$

Si $\lambda_{t+i} > 0$, le consommateur est contraint. Plus le prix de la contrainte est élevé, plus l'utilité marginale de la consommation future est faible et plus cette consommation future est importante. En effet, comme le consommateur n'emprunte pas aujourd'hui pour consommer une partie de ses revenus futurs, il consommera plus demain.

### V.2/ L'anticipation des contraintes et ses conséquences sur la dynamique de la consommation ?

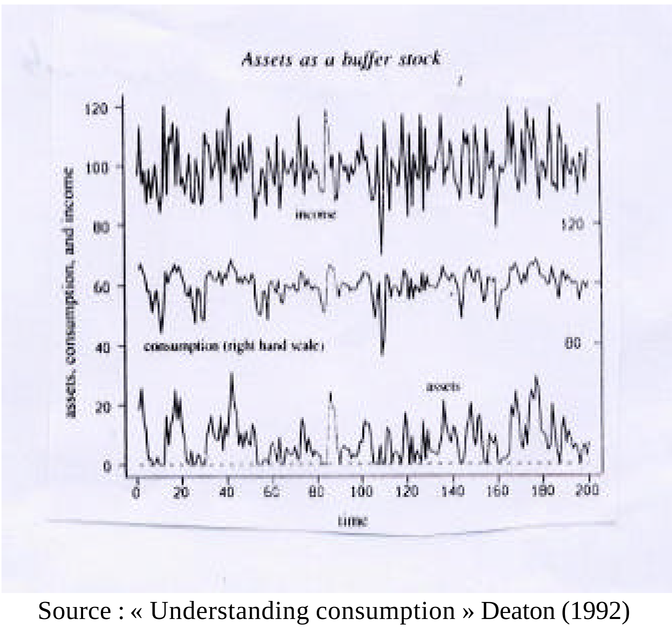
Deaton (1991, 1992) a remis en cause l'approche des contraintes de liquidité à partir des seules équations d'Euler. Dans cette approche, le consommateur, lorsqu'il n'est pas contraint retrouverait un niveau de consommation identique à celui déduit du modèle canonique de Hall. Dans l'approche défendue par Deaton, la possibilité de contraintes financières futures conduit le consommateur à modifier son comportement de consommation et d'épargne dès aujourd'hui, même s'il n'est pas encore contraint. Le comportement du consommateur, lorsqu'il anticipe des contraintes de liquidité est d'épargner en vue de constituer un stock de richesse, qui lui permettra de pallier les chocs négatifs futurs sur le revenu. On parle de stock tampon dans la littérature.

On note $c_t^{nc}$ la consommation déduite du modèle de Hall sans contrainte de liquidité. On distingue alors distinguer deux cas :

- Soit le consommateur est contraint, et alors il consomme toute sa richesse et le revenu courant :
$$c_t = y_t + W_t < c_t^{nc} \Rightarrow u'(W_t + y_t) > u'(c_t^{nc}) = \beta(1+r)\underset{t}{E}\,u'(c_{t+1})$$
- Soit le consommateur n'est pas contraint, et alors le profil de la consommation est déterminée par l'équation d'Euler habituelle :
$$u'(c_t) = \beta(1+r)\underset{t}{E}\,u'(c_{t+1})$$

On a donc l'équation :
$$u'(c_t) = Max\left(u\ (W_t + y_t), \beta(1+r)\underset{t}{E}\,u'(c_{t+1})\right)$$

**Figure 6** : Consommation, patrimoine et revenu non autocorrélé



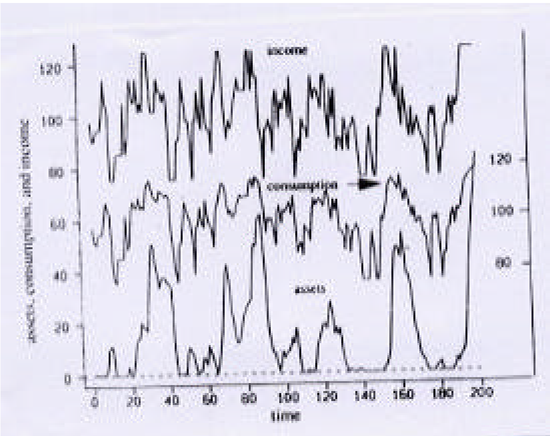

Source : « Understanding consumption » Deaton (1992)

Cette équation est résolue par un algorithme approprié, et pour différentes valeurs des paramètres. On suppose notamment un consommateur impatient $(r > r)$. On distingue deux possibilités quant à la dynamique du revenu : d'abord une absence d'autocorrélation (cf. figure 6), puis au contraire une forte autocorrection (cf. figure 7).

Lorsque le revenu n'est pas autocorrélé, le profil de la consommation apparaît lissé par rapport à celui du revenu (cf. figure 6). Lorsque le revenu est élevé, le consommateur constitue une épargne qui lui permettra d'amortir les conséquences de la baisse de ses revenus sur sa consommation future. On parle à propos de cette épargne d'épargne–tampon. Elle est en fait très proche de l'épargne de précaution. Ce lissage de la consommation permet d'expliquer en partie le fait stylisé mis en avant par Campbell et Deaton (1989), à savoir que la variation de la consommation ne s'explique que faiblement par celle du revenu et qu'elle est empiriquement plus lisse que ne le prévoit le modèle canonique de Hall. De plus, les variations de la consommation sont asymétriques : les baisses peuvent être parfois plus prononcées que les hausses, lorsque le stock d'épargne tampon a été épuisé par des plusieurs diminutions successives.

Lorsque le revenu est autocorrélé, le profil de la consommation suit d'assez près celui du revenu (cf. figure 7). Le consommateur accroît toujours son épargne tampon lorsque le revenu s'accroît, mais dans une moindre mesure que dans le cas précédent. En effet, une hausse du revenu est souvent d'une hausse du fait de l'autocorrection supposée dans le processus et l'évolution du revenu est donc cyclique. Le lissage intégral des fluctuations du revenu conduirait à détenir des stocks d'épargne tampon important pour un consommateur, que l'on a supposé impatient. Aussi, une partie de la hausse du revenu est-elle immédiatement consommée. Le profil de la consommation suit donc celui du revenu. Ce résultat permet d'expliquer le paradoxe de Flavin, à savoir une consommation apparemment sensible aux revenus passés.

**Figure 7** : Consommation, patrimoine et revenu non autocorrélé




Source : « Understanding consumption » Deaton (1992)

La sensibilité du lissage des revenus au niveau de l'autocorrection peut être illustrée à partir des résultats du tableau 4.

**Tableau 4** : Consommation, lissage du revenu et autocorrection.

| Coefficient d'autocorrection | 0,0 | 0,3 | 0,5 | 0,7 | 0,9 |
|---|---|---|---|---|---|
| Ecart-type du revenu (a) | 10,2 | 10,0 | 11,1 | 13,3 | 27,5 |
| Ecart-type de la consommation (b) | 5,1 | 6,7 | 7,6 | 10,4 | 25,9 |
| Ratio (b)/(a) | 0,50 | 0,67 | 0,67 | 0,78 | 0,94 |

Source : « Understanding consumption » Deaton (1992)

## Bibliographie

*Blanchard O.J et Fisher S.* (1989) : « Lectures on macroeconomics ». MIT press, Cambridge University Press

*Caballero R.J* (1990) : « Consumption puzzles and precautionary savings » Journal of Monetary Economics 25 113-136

*Campbell J.Y* (1987) : « Does saving anticipate declining labor income? An alternative test of the permanent income hypothesis » Econometrica V 55, N°6, 1249-1273

*Campbell J.Y et Deaton A.* (1989) : « Why is Consumption So Smooth? » Review of Economic Studies 56, 357-374

*Campbell J.Y et Mankiw N.G* (1989) : « Consumption, Income and Interest Rates : Reinterpreting the Time Series Evidence » NBER Macroeconomics Annual

*Carroll C.D (1997)* : « Does Saving anticipate Declining Labor Income? An alternative Test of the Permanent Income Hypothesis? » Econometrica Vol 55 N°6 November 1249-1273

*Carroll C.D (1994)* : « How does Future Income Affect Current Consumption? » The Quarterly Journal Of Economics February

*Carroll C.D (1992)* : « The Buffer-Stock Theory of Saving : Some Macroeconomic Evidence » Brookings Papers on Economic Activity 2:1992

*Davidson J.E.H, Hendry D., Srba F. et Yeo S.* (1978) : « Econometric Modelling of the Aggregate Time-Series Relationship between Consumers' Expenditure and Income in the United-Kingdom » The Economic Journal N°88 December 661-692

*Deaton A. (1991)* : « Saving and Liquidity Constraints » Econometrica Vol 59 N°5 September 1221-1248

*Deaton A.* (1992) : « Understanding consumption » Clarendon Lectures in Economics, Clarendon University Press, oxford.

*Dynan K.E (1993)* : « How Prudent are Consumers » Journal of Political Economy Vol 101, N°6

*Flavin M.* (1981) : « The adjustment of consumption to changing expectations about future income » Journal of Political Economy, 89, 974-1009

*Keynes J.M* (1936) : « Théorie générale de l'emploi, de l'intérêt et de la monnaie » Petite bibliothèque Payot

*Kimball M.S* (1990) : « Precautionary saving in the small and in the large » Econometrica Vol 58 N°1 January 53-73

*Malinvaud E* (1981) : « Théorie macroéconomique » Dunod

*Malinvaud E*. ( 1975) : « Leçons de théorie microéconomique » Dunod

*Ram R.* (1982) : »Dependency rates and aggregate savings : a new international cross-section study » American Economic Review, June 1982

*Skinner J.* (1988) : « Risky income, life cycle consumption and precautionary savings » Journal of Monetary Economics 22 237-255

## Exercices corrigés

### Exercice 1

L'estimation sur données individuelles transversales conduit à poser le modèle :

$$C_{i,\bar{t}} = aY_{i,\bar{t}} + b + u_i$$

On obtient :

$$\begin{cases} 0 < \hat{a} = \operatorname{cov}\left(Y^P_{i,\bar{t}}\right) / \operatorname{var}\left(Y_{i,t}\right) = \operatorname{var}\left(Y^P_{.,\bar{t}}\right) / \left(\operatorname{var}\left(Y^P_{.,\bar{t}}\right) + \operatorname{var}\left(Y^T_{.,\bar{t}}\right)\right) < 1 \\ \hat{b} = (1-\hat{a})\overline{Y^P_{.,\bar{t}}} \end{cases}$$

On retrouve donc ici la fonction de consommation keynésienne, avec ses propriétés habituelles. Au contraire, sur données agrégées et logitudinales, on retrouve exactement la fonction friedmanienne :

$$\sum_i C_{i,t} = \sum_t Y^P_{i,t}$$

### Exercice 2

$$LogC_t = a_1 LogC_{t-1} + a_2 LogY_t \Rightarrow LogC_t = a_2 \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i LogY_{t-i}$$

L'élasticité de long terme est : $a_2/(1-a_1)$

Le délai d'ajustement peut être défini par :

$$\frac{a_2 \sum_{i=0}^{\infty} i a_1^i}{a_2/(1-a_1)} = a_1(1-a_1)\left[\sum_{i=01}^{\infty} a_1^i\right]' = a_1(1-a_1)\left[\frac{1}{1-a_1}\right]' = \frac{a_1}{1-a_1}$$

### Exercice 3

Le lagrangien du programme d'optimisation du consommateur s'écrit :

$$\underset{t}{Max\,E} \sum_{i=0}^{\infty}\left[\boldsymbol{b}^i u(c_{t+i}) + \boldsymbol{l}_i \left\{W_{t+i+1} - (1+r)\left(W_{t+i} + y_{t+i} - c_{t+i}\right)\right\}\right]$$

Les conditions de premier ordre donnent respectivement :

$$\begin{cases} /\, c_{t+i} : \boldsymbol{b}^i\, u'(c_{t+i}) = -\boldsymbol{l}_i (1+r) \\ /W_{t+i+1} : \boldsymbol{l}_i - (1+r)\boldsymbol{l}_{i+1} = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boldsymbol{b}^i\, u'(c_{t+i}) = (1+r)\boldsymbol{b}^{i+1}\; u'(c_{t+i+1})$$

Donc : $u'(c_{t+i}) = -\boldsymbol{l}_0((1+r)^{-i+1}\boldsymbol{b}^i$

Pour $i = 0$, on trouve $u'(c_t) = -\boldsymbol{l}_0(1+r)$

D'où : $u'(c_{t+i}) = u'(c_t)$

Comme la fonction d'utilité marginale est quadratique, on trouve que la consommation est équirépartie entre chaque période.

### Exercice 4

**Cas 1** : $u_t = W_t + y_t - c_t$

L'équation de transition s'écrit donc : $W_{t+i+1} = (1+r)u_{t+i}$

L'équation de Bellman est :

$$V(W_{t+i}) = \max_{u_{t+i}} \left\{ u(-u_{t+i} + y_{t+i} + W_{t+i}) + \beta \underset{t}{E} V(W_{t+i+1}) \right\}$$

Les conditions de premier ordre donnent $(/u_{t+i})$ :

$$-u'(-u_{t+i} + y_{t+i} + W_{t+i}) + \beta(1+r)\underset{t}{E} V'(W_{t+i+1}) = 0$$

La condition de Benveniste-Scheinkman donne ici $(/W_{t+i})$ :

$$V'(W_{t+i}) = u'(c_{t+i})$$

Cette dernière condition signifie que l'utilité marginale du stock d'épargne est égale l'utilité marginale de la consommation[9]. Si l'utilité marginale du stock d'épargne était supérieure à l'utilité marginale de la consommation, le consommateur aurait intérêt à augmenter son épargne.

D'où vient :

$$u'(c_{t+i}) = \beta(1+r)\underset{t}{E}\, u'(c_{t+i+1})$$

**Cas 2** : $u_t = y_t - c_t$

L'équation de transition s'écrit donc : $W_{t+i+1} = (1+r)(W_{t+i} + u_{t+i})$

L'équation de Bellman est :

$$V(W_{t+i}) = \max_{u_{t+i}} \left\{ u(-u_{t+i} + y_{t+i}) + \beta \underset{t}{E} V(W_{t+i+1}) \right\}$$

Les conditions de premier ordre donnent $(/u_{t+i})$ :

$$-u'(-u_{t+i} + y_{t+i}) + \beta(1+r)\underset{t}{E} V'(W_{t+i+1}) = 0$$

La condition de Benveniste-Scheinkman donne ici $(/W_{t+i})$ :

$$V'(W_{t+i}) = \beta(1+r)\underset{t}{E} V'(W_{t+i+1})$$

D'où vient :

$$u'(c_{t+i}) = \beta(1+r)\underset{t}{E}\, u'(c_{t+i+1})$$

**Exercice 7**

La fonction d'utilité $u(c) = -1/\alpha \exp(-\alpha c)$ est strictement concave si $\alpha > 0$. On a en particulier :

$u' = \exp(-\alpha c) > 0$ et $u'' = -\alpha \exp(-\alpha c) < 0$

De plus, le coefficient d'aversion absolue au risque est $\alpha$.

L'équation d'Euler s'écrit : $\underset{0}{E} \exp(-\alpha \Delta c_{t+1}) = 1$

Cas 1 : univers certain

On a donc : $c_{t+1} = c_t = c$ et $y_t = y$

La contrainte de revenu s'écrit :

[9] Si l'utilité marginale du stock d'épargne était supérieure à l'utilité marginale de la consommation, le consommateur aurait intérêt à augmenter son épargne.

$$W_{t+j} + y_{t+j} = W_{t+j+1} + c_{t+j}$$

En sommant la contrainte de revenu de *j=0,…,T-j-1*, on obtient :

$$W_t + (T-t)y = W_T + (T-t)c$$

Comme le patrimoine légué ne rapporte pas d'utilité : $W_T = 0$

D'où :

$$c = \frac{1}{T-t}W_t + y$$

Cas 2 : univers incertain

On différencie deux fois la contrainte de revenu, d'où :

$$(1-L)y_{t+j} = (1-L)^2 W_{t+j+1} + (1-L)c_{t+j}$$

On suppose que $(1-L)^2 W_{t+j+1}$ est constant (à vérifier plus tard). On obtient donc que la variation du revenu est normale, de variance $\sigma^2$. D'où :

$$\underset{0}{E}\exp(-\alpha\Delta c_{t+1}) = \exp\left(-\alpha\underset{0}{E}(1-L)c_{t+1} + \alpha^2\sigma^2/2\right) = 1$$

Soit :

$$\underset{0}{E}(1-L)c_t = \varepsilon_t + \frac{\alpha\sigma^2}{2}$$

En sommant la contrainte de revenu de *j=0,…,T-j-1*, on obtient en prenant l'espérance à la date *t* :

$$W_t + (T-t)y_t = (T-t)c_t + (T-t)(T-t-1)\frac{\alpha\sigma^2}{4}$$

soit :

$$c_t = \frac{W_t}{T-t} + y_t + (T-t-1)\frac{\alpha\sigma^2}{4}$$

Les effets « revenu permanent » et les effets « épargne de précaution » sont ici additivement séparables.

## ANNEXE 1 : Aversions absolues et relatives

On a : $c = \bar{c} + e$ avec $Ee^2 = s^2$
De plus, par approximation au deuxième ordre :

$$u(c) = u(\bar{c}) + eu^{'}(\bar{c}) + \frac{1}{2}e^2 u''(\bar{c}) \Rightarrow E\,u(c) = u(\bar{c}) + \frac{1}{2}s^2 u''(\bar{c})$$

Comme la fonction d'utilité est concave, on a :

$$Eu(c) < u(E(c))$$

On peut donc la prime de risque comme le montant dque l'on doit retirer de l'espérance de consommation pour s'assurer de l'espérnace de la consommation. Deux primes peuvent en fait être définies, l'une additive (et son corrolaire l'aversion absolue) et l'autre multiplicative (et son corroloaire l'aversion relative).

**Cas 1** : aversion absolue
On a la prime de risque qui est définie par : $Eu(c) = u(E(c) - prim) = u(\bar{c} - prim)$
D'où, par dévelopement limité à l'ordre un de la fonction d'utilité :

$$u(\bar{c}) + \frac{1}{2}s^2 u''(\bar{c}) = u(\bar{c}) - prim u'(\bar{c}) \Rightarrow prim = -\frac{s^2 u''}{2u'}$$

Le rapport $-\frac{u''}{u'}$ est appelé aversion absolue par rapport au risque.

**Cas 2** : aversion relative
On a la prime de risque qui est définie par : $Eu(c) = u(E(c)(1 - prim)) = u(\bar{c}(1 - prim))$
D'où, par dévelopement limité à l'ordre un de la fonction d'utilité :

$$u(\bar{c}) + \frac{1}{2}s^2 u''(\bar{c}) = u(\bar{c}) - \bar{c} prim u'(\bar{c}) \Rightarrow prim = -\frac{s^2 \bar{c} u''}{2u'}$$

Le rapport $-\frac{u''\bar{c}}{u'}$ est appelé aversion relative par rapport au risque.

## ANNEXE 2 : Programmation dynamique en temps discret

### 1/ Cas déterministe et discret

On cherche à résoudre le programme de maximisation suivant :

$$\underset{x_i, u_i}{Max} \sum_{i=0}^{T} \beta^i r(x_i, u_i)$$

$$\text{sc.} \begin{cases} x_1 = g(x_0, u_0) \\ . \\ . \\ x_{T+1} = g(x_T, u_T) \end{cases}$$

On contrôle les variables $u_i$ alors que les variables $x_i$ décrivent l'état du système en début de période. La dynamique de ces variables d'état est donnée par les équations de transition g.

1.1/ *Equation de Bellman :* principe de récurrence arrière

$$V_{j+1}(x_{T-j}) = \max_{u_{T-j}} \left[ r(x_{T-j}, u_{T-j}) + \beta V_j (x_{T-j+1}) \right]$$

$$\text{sc.} \begin{cases} x_{T-j+1} = g(x_{T-j}, u_{T-j}) \\ . \\ . \\ x_{T+1} = g(x_T, u_T) \end{cases}$$

La valeur optimale du problème en *T-j* est déduite de la valeur optimale actualisée du problème en *T-J+1* augmentée de l'utilité de la période courante. De cette optimisation, on déduit une règle de décision (ou encore politique optimale) pour chaque période *i* : $u_i = h(x_i)$

Si $x_0$ est la variable d'état à la date *t=0*, on a alors $V(x_0)$ solution du problème :

$$V(x_0) = \max_{u_s} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i r(x_i, u_i)$$

$$\text{sc. } x_{i+1} = g(x_i, u_i)$$

Lorsque $j \to \infty$, on obtient la solution du problème en horizon infini : $V = \lim_{j \to \infty} V_j$.

1.2/ *Résultat de Benveniste-Scheinkman* (horizon infini)

$$V'(x) = \frac{\partial r}{\partial x}(x, u) + \beta \frac{\partial g}{\partial x}(x, u) V'(g(x, u)) \qquad \text{avec } u = h(x)$$

1.3/ *Equation d'Euler*

Le lagrangien du problème de maximisation s'écrit :

$$L = \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i r(x_i, u_i) + \sum_{i=0}^{\infty} \lambda'_i (g(x_i, u_i) - x_{i+1})$$

Soit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = \beta^i \dfrac{\partial r}{\partial x_i}(x_i, u_i) + \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(x_i, u_i)\, \lambda_i = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial u_i} = \beta^i \dfrac{\partial r}{\partial u_i}(x_i, u_i) + \dfrac{\partial g}{\partial u_i}(x_i, u_i)\, \lambda_i = 0 \end{cases}$$

Si la variable d'état n'apparaît pas dans l'équation de transition, on a $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(x_i, u_i)\, \lambda_i = 0$. D'où :

$$\frac{\partial r}{\partial u_i}(x_i, u_i) + \beta \frac{\partial g(x_i, u_i)}{\partial u_i} \frac{\partial r}{\partial x_{i+1}}(x_{i+1}, u_{i+1}) = 0$$

## 2/ Cas stochastique et discret[10]

Par rapport au cas déterministe, les équations de transition sont stochastiques :

$$\underset{x_i, u_i}{Max}\ \underset{0}{E}\left[\sum_{i=0}^{T} \beta^i r(x_i, u_i)\right]$$

$$\text{sc.}\begin{cases} x_1 = g(x_0, u_0, \varepsilon_0) \\ . \\ . \\ x_{T+1} = g(x_T, u_T, \varepsilon_T) \end{cases}$$

1.1/ *Equation de Bellman :* principe de récurrence

$$V_{j+1}(x_{T-j}) = \max_{u_{T-j}}\left[r(x_{T-j}, u_{T-j}) + \beta \underset{T-j}{E} V_j(x_{T-j+1})\right]$$

$$\text{sc.}\begin{cases} x_{T-j+1} = g(x_{T-j}, u_{T-j}, \varepsilon_{T-j}) \\ . \\ . \\ x_{T+1} = g(x_T, u_T, \varepsilon_T) \end{cases}$$

La valeur optimale du problème en *T-j* est déduite de l'espérance (en *T-j*) de la valeur du problème en *T-J+1* augmentée de l'utilité de la période courante. De cette optimisation, on déduit une règle de décision pour chaque période *i* : $u_i = h(x_i)$

On peut remarquer que la récurrence pourrait également s'écrire :

$$V_{j+1}(x_{T-j}) = \max_{u_{T-j}}\left[r(x_{T-j}, u_{T-j}) + \beta \underset{T-j}{E} V_j\left(g(x_{T-j}, u_{T-j}, \varepsilon_{T-j})\right) / x_{T-j}\right]$$

Lorsque $j \to \infty$, on obtient la solution du problème en horizon infini : $V = \lim_{j\to\infty} V_j$

La limite *V* vérifie donc l'équation de Bellman en horizon infini :

$$V(x) = \max_u\left[r(x,u) + \beta E V\left(g(x,u,\varepsilon)\right) / x\right]$$

De plus, on a :

[10] Dans cette présentation, on suppose qu'à la date *t*, les variables $x_t$ et $u_t$ sont connues.

$$V\left(x_0\right) = \max_{u_s} \underset{0}{E}\left[\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i r(x_i , u_i)\right]$$
$$\text{sc. } x_{i+1} = g(x_i , u_i , \varepsilon_j)$$

1.2/ *Résultat de Benveniste-Scheinkman* (horizon infini)

$$V^{'}\left(x\right) = \frac{\partial r}{\partial x}\left(x, u\right) + \beta\, E\left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}\left(x, u, \varepsilon\right) V^{'}\left(g\left(x, u, \varepsilon\right)\right)\right) / \, x\right] \qquad \text{avec } u = h\left(x\right)$$

1.3/ *Equation d'Euler stochastique*

$$\frac{\partial r}{\partial u_i}\left(x_i , u_i\right) + \beta\, \underset{i}{E}\left[\frac{\partial g(x_i , u_i , \varepsilon_j)}{\partial u_i} \frac{\partial r(x_{i+1} , u_{i+1} , \varepsilon_{j+1})}{\partial x_{i+1}}\right] = 0$$